NGUYỄN HUY ĐOAN (Chủ biên)
PHẠM THỊ BẠCH NGỌC - ĐOÀN QUỲNH
ĐẶNG HÙNG THẮNG - LƯU XUÂN TÌNH

# BÀI TẬP
# ĐẠI SỐ
# 10
## NÂNG CAO

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

NGUYỄN HUY ĐOAN (Chủ biên)
PHẠM THỊ BẠCH NGỌC - ĐOÀN QUỲNH - ĐẶNG HÙNG THẮNG - LƯU XUÂN TÌNH

# BÀI TẬP
# ĐẠI SỐ
# NÂNG CAO 10

*(Tái bản lần thứ năm)*

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

**Bản quyền thuộc Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam**

---

01–2011/CXB/850–1235/GD

Mã số : NB003T1

# LỜI NÓI ĐẦU

Kể từ năm học 2006 2007, ngành Giáo dục bắt đầu thực hiện giảng dạy theo chương trình và sách giáo khoa mới lớp 10. Đi kèm với việc đổi mới chương trình và sách giáo khoa là đổi mới về phương pháp dạy học và đổi mới công tác kiểm tra đánh giá kết quả học tập của học sinh. Điều đó phải được thể hiện không những trong sách giáo khoa, sách giáo viên mà còn trong cả sách bài tập - một tài liệu không thể thiếu đối với giáo viên và học sinh. Cuốn *Bài tập Đại số 10 nâng cao* này được biên soạn theo tinh thần đó.

*Bài tập Đại số 10 nâng cao* gồm các bài tập được chọn lọc và sắp xếp một cách hệ thống, bám sát từng chủ đề kiến thức trong sách giáo khoa, nhằm giúp các em học sinh sử dụng song song với sách giáo khoa, vừa củng cố kiến thức đang học, vừa nâng cao kĩ năng giải toán.

Tương tự như sách giáo khoa *Đại số 10 nâng cao*, nội dung của sách này gồm sáu chương :

Chương I. Mệnh đề - Tập hợp

Chương II. Hàm số bậc nhất và bậc hai

Chương III. Phương trình và hệ phương trình

Chương IV. Bất đẳng thức và bất phương trình

Chương V. Thống kê

Chương VI. Góc lượng giác và công thức lượng giác.

Mỗi chương đều được mở đầu bằng phần "*Những kiến thức cần nhớ*" Phần này tóm tắt lại những kiến thức quan trọng của chương. Học sinh đọc "*Những kiến thức cần nhớ*" để tìm tòi những kiến thức được vận dụng trong quá trình giải bài tập. Sau khi học xong mỗi chương, các em nên trở lại phần này để ôn tập và ghi nhớ những kiến thức đó.

Tiếp theo là phần "*Đề bài*" và sau đó là phần "*Đáp số - Hướng dẫn Lời giải*". Các bài tập trong phần "*Đề bài*" được sắp xếp theo đúng trình tự các bài học trong sách giáo khoa. Do đó học sinh có thể dễ dàng tự lựa chọn bài tập để làm thêm sau mỗi bài học. Bên cạnh các bài tập bám sát yêu cầu của sách giáo khoa, sách còn bổ sung một số bài tập với yêu cầu cao hơn, giúp học sinh bước đầu tiếp cận với những dạng toán chuẩn bị thi vào Đại học. Ngoài ra, cuối mỗi chương đều có các bài tập trắc nghiệm khách quan nhằm giúp học sinh làm quen với phương pháp kiểm tra đánh giá mới này. Cần chú ý rằng mỗi câu hỏi trắc nghiệm khách quan, học sinh chỉ được làm trong thời gian hết sức hạn chế (chẳng hạn, từ 1 đến 2 phút).

Sau khi giải bài tập, học sinh có thể tự mình kiểm tra lại kết quả bằng cách đối chiếu với phần "*Đáp số - Hướng dẫn - Lời giải*" (ngay sau phần "*Đề bài*" của mỗi chương). Trong phần này, các tác giả chỉ chọn lọc và nêu lời giải đầy đủ của một số ít bài, còn lại phần lớn các bài đều chỉ cho đáp số hoặc đáp số có kèm theo gợi ý khi cần thiết. Chú ý rằng các hướng giải được nêu trong "*Hướng dẫn*", thậm chí trong các bài giải chi tiết cũng có thể chưa phải là hướng giải tốt nhất. Các tác giả nhấn mạnh điều này với mong muốn : chính học sinh sẽ là những người đưa ra những lời giải hay hơn, sáng tạo hơn.

Mặc dù các tác giả đã rút kinh nghiệm từ sách thí điểm và đã cố gắng để có được bản thảo tốt nhất, nhưng chắc chắn sách không tránh khỏi còn nhiều thiếu sót. Các tác giả rất mong nhận được góp ý của bạn đọc gần xa, nhất là của giáo viên và các em học sinh - những người trực tiếp sử dụng sách.

Cuối cùng, các tác giả tỏ lòng biết ơn đến Hội đồng Thẩm định của Bộ Giáo dục – Đào tạo đã góp nhiều ý kiến quý báu, đến Ban biên tập sách Toán Tin, Công ty cổ phần Dịch vụ xuất bản Giáo dục Hà Nội – Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam đã giúp đỡ, hợp tác tích cực và có hiệu quả trong quá trình biên soạn cuốn *Bài tập Đại số 10 nâng cao* này.

**CÁC TÁC GIẢ**

# Chương I

# MỆNH ĐỀ - TẬP HỢP

## A. NHỮNG KIẾN THỨC CẦN NHỚ

### Mệnh đề

- Mệnh đề logic (gọi tắt là mệnh đề) là một câu khẳng định đúng hoặc một câu khẳng định sai. Một mệnh đề không thể vừa đúng vừa sai.
- Mệnh đề "Không phải $P$", kí hiệu là $\overline{P}$, được gọi là mệnh đề phủ định của $P$. Mệnh đề $\overline{P}$ đúng nếu $P$ sai và $\overline{P}$ sai nếu $P$ đúng.
- Mệnh đề "Nếu $P$ thì $Q$", kí hiệu là $P \Rightarrow Q$, được gọi là mệnh đề kéo theo. Mệnh đề kéo theo chỉ sai khi $P$ đúng, $Q$ sai.
- Mệnh đề "$P$ nếu và chỉ nếu $Q$", kí hiệu là $P \Leftrightarrow Q$, được gọi là mệnh đề tương đương. Mệnh đề này đúng khi và chỉ khi $P$, $Q$ cùng đúng hoặc cùng sai.
- Phủ định của mệnh đề "$\forall x \in X,\ P(x)$" là mệnh đề "$\exists x \in X,\ \overline{P(x)}$"
- Phủ định của mệnh đề "$\exists x \in X,\ P(x)$" là mệnh đề "$\forall x \in X,\ \overline{P(x)}$"

### Tập hợp

- Tập $A$ được gọi là tập con của tập $B$, kí hiệu là $A \subset B$, nếu mọi phần tử của $A$ đều là phần tử của $B$.
- Phép giao

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ và } x \in B\}.$$

- Phép hợp

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ hoặc } x \in B\}.$$

- Hiệu của hai tập hợp

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ và } x \notin B\}.$$

- Phép lấy phần bù : Nếu $A \subset E$ thì

$$\complement_E A = E \setminus A = \{x \mid x \in E \text{ và } x \notin A\}.$$

**Số gần đúng và sai số**

- Cho $\overline{a}$ là giá trị đúng, $a$ là giá trị gần đúng của $\overline{a}$. Giá trị $\Delta_a = |\overline{a} - a|$, được gọi là sai số tuyệt đối của số gần đúng $a$. Khi viết $\overline{a} = a \pm d$, ta hiểu số đúng nằm trong đoạn $[a - d ; a + d]$. Người ta gọi $d$ là độ chính xác của số gần đúng $a$.

- Tỉ số $\delta_a = \dfrac{|\overline{a} - a|}{|a|}$. kí hiệu là $\delta_a$, được gọi là sai số tương đối của số gần đúng $a$ (thường được nhân với 100% để viết dưới dạng phần trăm).

- Khi thay số đúng bởi số quy tròn thì sai số tuyệt đối không vượt quá nửa đơn vị của hàng quy tròn.

- Xét số gần đúng $a$ của số đúng $\overline{a}$.

+ Nếu $a$ là số thập phân không nguyên, được viết dưới dạng chuẩn mà có $k$ chữ số ở phần thập phân thì sai số tuyệt đối của $a$ không vượt quá $\frac{1}{2}10^{-k}$, nghĩa là

$$a - \frac{1}{2}10^{-k} \leq \overline{a} \leq a + \frac{1}{2}10^{-k}.$$

+ Nếu $a$ là số nguyên được viết dưới dạng chuẩn $a = A.10^k$ với $A \in \mathbb{Z}$ và $k \in \mathbb{N}$ thì sai số tuyệt đối của $a$ không vượt quá $\frac{1}{2}10^k$, nghĩa là

$$a - \frac{1}{2}10^{k} \leq \overline{a} \leq a + \frac{1}{2}10^{k}$$

## B. ĐỀ BÀI

### §1. MỆNH ĐỀ VÀ MỆNH ĐỀ CHỨA BIẾN

**1.1.** Trong các câu sau đây câu nào là mệnh đề ? Với câu là mệnh đề hãy xác định xem mệnh đề đó đúng hay sai.

a) Không được đi qua lối này !

b) Bây giờ là mấy giờ ?

c) Chiến tranh thế giới lần thứ hai kết thúc năm 1946.

d) $4 + x = 5$.

e) 16 chia 3 dư 1.

f) $\sqrt{5}$ là số vô tỉ.

g) Phương trình $x^2 + 3x + 5 = 0$ có nghiệm.

**1.2.** Nêu mệnh đề phủ định của mỗi mệnh đề sau và xác định xem mệnh đề phủ định đó đúng hay sai :

a) $P$ : "Phương trình $x^2 + x + 1 = 0$ có nghiệm".

b) $Q$ : "Năm 2000 là năm nhuận"

c) $R$ : "327 chia hết cho 3".

**1.3.** Nêu mệnh đề phủ định của các mệnh đề sau :

$P$ : "Tứ giác $ABCD$ đã cho nội tiếp được trong đường tròn"

$Q$ : "Tam giác $ABC$ đã cho là tam giác cân"

$R$ : "13 có thể biểu diễn thành tổng của hai số chính phương"

$H$ : "$2^{13} - 1$ là một số nguyên tố".

**1.4.** Cho tam giác $ABC$ với đường trung tuyến $AM$. Xét hai mệnh đề

$P$ : "Tam giác $ABC$ vuông tại $A$" ;

$Q$ : "Trung tuyến $AM$ bằng nửa cạnh $BC$"

a) Phát biểu mệnh đề $P \Rightarrow Q$ và cho biết mệnh đề này đúng hay sai.

b) Phát biểu mệnh đề $P \Leftrightarrow Q$ và cho biết mệnh đề này đúng hay sai.

**1.5.** Xét mệnh đề $R$ : "Vì 120 chia hết cho 6 nên chia hết cho 9"

Nếu viết mệnh đề $R$ dưới dạng "$P \Rightarrow Q$", hãy nêu nội dung của các mệnh đề $P$ và $Q$.

Hỏi mệnh đề $R$ đúng hay sai, tại sao ?

**1.6.** Cho hai mệnh đề

$P$ : "42 chia hết cho 5" ;

$Q$ : "42 chia hết cho 10".

Phát biểu mệnh đề $P \Rightarrow Q$. Hỏi mệnh đề này đúng hay sai, tại sao ?

**1.7.** Cho hai mệnh đề

$P$ : "$2^{2003} - 1$ là số nguyên tố" ;

$Q$ : "16 là số chính phương"

Phát biểu mệnh đề $P \Rightarrow Q$. Hỏi mệnh đề này đúng hay sai, tại sao ?

**1.8.** Cho hai tam giác $ABC$ và $DEF$ Xét các mệnh đề sau

$P$ : "$\widehat{A} = \widehat{D}, \widehat{B} = \widehat{E}$" ;

$Q$ : "Tam giác $ABC$ đồng dạng với tam giác $DEF$"

Phát biểu mệnh đề $P \Rightarrow Q$. Hỏi mệnh đề này đúng hay sai, tại sao ?

**1.9.** Xét hai mệnh đề

$P$ : "7 là số nguyên tố" ;

$Q$ : "$6! + 1$ chia hết cho 7".

Phát biểu mệnh đề $P \Leftrightarrow Q$ bằng hai cách. Cho biết mệnh đề đó đúng hay sai.

**1.10.** Xét hai mệnh đề

$P$ : "6 là số nguyên tố" ;

$Q$ : " $5! + 1$ chia hết cho 6".

Phát biểu mệnh đề $P \Leftrightarrow Q$ bằng hai cách. Cho biết mệnh đề đó đúng hay sai.

**1.11.** Gọi $X$ là tập hợp tất cả các học sinh lớp 10 ở trường em. Xét mệnh đề chứa biến $P(x)$ : "$x$ tự học ở nhà ít nhất 4 giờ trong một ngày" $(x \in X)$ Hãy phát biểu các mệnh đề sau bằng các câu thông thường :

a) $\exists x \in X, P(x)$ ; b) $\forall x \in X, P(x)$ ;

c) $\exists x \in X, \overline{P(x)}$ ; d) $\forall x \in X, \overline{P(x)}$.

**1.12.** Xét các câu sau đây :

a) Tất cả các học sinh ở trường em đều phải học luật giao thông.

b) Có một học sinh lớp 12 ở trường em có điện thoại di động.

Hãy viết các câu đó dưới dạng "$\forall x \in X, P(x)$" hoặc "$\exists x \in X, P(x)$" và nêu rõ nội dung mệnh đề chứa biến $P(x)$ và tập hợp $X$.

**1.13.** Cho mệnh đề chứa biến $P(x)$ : "$x = x^4$" với $x$ là số nguyên. Xác định tính đúng - sai của các mệnh đề sau đây :

a) $P(0)$ ; b) $P(1)$ ;

c) $P(2)$ ; d) $P(-1)$ ;

e) $\exists x \in \mathbb{Z}, P(x)$ ; g) $\forall x \in \mathbb{Z}, P(x)$.

**1.14.** Lập mệnh đề phủ định của các mệnh đề sau :

a) $\forall x \in \mathbb{R}, x > x^2$

b) $\forall n \in \mathbb{N}$, $n^2 + 1$ không chia hết cho 3.

c) $\forall n \in \mathbb{N}$, $n^2 + 1$ chia hết cho 4.

d) $\exists r \in \mathbb{Q}$, $r^2 = 3$.

**1.15.** Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau và lập mệnh đề phủ định của các mệnh đề đó :

a) $\exists r \in \mathbb{Q}$, $4r^2 - 1 = 0$.

b) $\exists n \in \mathbb{N}$, $n^2 + 1$ chia hết cho 8.

c) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 1 > 0$.

d) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $1 + 2 + \ldots + n$ không chia hết cho 11.

**1.16.** Cho mệnh đề chứa biến $P(x)$ : "$x$ thích môn Ngữ văn", trong đó $x$ lấy giá trị trên tập hợp $X$ các học sinh của trường em.

a) Dùng kí hiệu lôgic để diễn tả mệnh đề : "Mọi học sinh của trường em đều thích môn Ngữ văn."

b) Nêu mệnh đề phủ định của mệnh đề trên bằng kí hiệu lôgic rồi diễn đạt mệnh đề phủ định đó bằng câu thông thường.

**1.17.** Cho mệnh đề chứa biến $P(x)$ : "$x$ đã đi máy bay", trong đó $x$ lấy giá trị trên tập hợp $X$ các cư dân của khu phố (hay xã) em.

a) Dùng kí hiệu lôgic để diễn tả mệnh đề : "Có một người của khu phố (hay xã) em đã đi máy bay"

b) Nêu mệnh đề phủ định của mệnh đề trên bằng kí hiệu lôgic rồi diễn đạt mệnh đề phủ định bằng câu thông thường.

## §2. ÁP DỤNG MỆNH ĐỀ VÀO SUY LUẬN TOÁN HỌC

**1.18.** Phát biểu và chứng minh các định lí sau :

a) $\forall n \in \mathbb{N}$, $n^2$ chia hết cho $3 \Rightarrow n$ chia hết cho 3 (*gợi ý :* Chứng minh bằng phản chứng).

b) $\forall n \in \mathbb{N}$, $n^2$ chia hết cho $6 \Rightarrow n$ chia hết cho 6.

**1.19.** Cho các mệnh đề chứa biến $P(n)$ : "$n$ là số chẵn" và $Q(n)$ : "$7n + 4$ là số chẵn"

a) Phát biểu và chứng minh định lí $\forall n \in \mathbb{N},\ P(n) \Rightarrow Q(n)$.

b) Phát biểu và chứng minh định lí đảo của định lí trên.

c) Phát biểu gộp định lí thuận và đảo bằng hai cách.

**1.20.** Cho các mệnh đề chứa biến $P(n)$ : "$n$ chia hết cho 5" ; $Q(n)$ : "$n^2$ chia hết cho 5" và $R(n)$ : "$n^2 + 1$ và $n^2 - 1$ đều không chia hết cho 5"

Sử dụng thuật ngữ "điều kiện cần và đủ", phát biểu và chứng minh các định lí dưới đây :

a) $\forall n \in \mathbb{N},\ P(n) \Leftrightarrow Q(n)$.

b) $\forall n \in \mathbb{N},\ P(n) \Leftrightarrow R(n)$.

**1.21.** Cho các số thực $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Gọi $a$ là trung bình cộng của chúng

$$a = \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}.$$

Chứng minh (bằng phản chứng) rằng : ít nhất một trong các số $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sẽ lớn hơn hay bằng $a$.

**1.22.** Sử dụng thuật ngữ "điều kiện đủ" để phát biểu các định lí sau :

a) Nếu hai tam giác bằng nhau thì chúng đồng dạng với nhau.

b) Nếu một hình thang có hai đường chéo bằng nhau thì nó là hình thang cân.

c) Nếu tam giác $ABC$ cân tại $A$ thì đường trung tuyến xuất phát từ đỉnh $A$ cũng là đường cao.

**1.23.** Sử dụng thuật ngữ "điều kiện cần" để phát biểu các định lí sau :

a) Nếu một số nguyên dương lẻ được biểu diễn thành tổng của hai số chính phương thì số đó phải có dạng $4k + 1$ ($k \in \mathbb{N}$).

b) Nếu $m$, $n$ là hai số nguyên dương sao cho $m^2 + n^2$ là một số chính phương thì $m.n$ chia hết cho 12.

**1.24.** Hãy phát biểu và chứng minh định lí đảo của định lí sau (nếu có) rồi sử dụng thuật ngữ điều kiện "cần và đủ" để phát biểu gộp cả hai định lí thuận và đảo :

Nếu $m$, $n$ là hai số nguyên dương và mỗi số đều chia hết cho 3 thì tổng $m^2 + n^2$ cũng chia hết cho 3.

## §3. TẬP HỢP VÀ CÁC PHÉP TOÁN TRÊN TẬP HỢP

**1.25.** Cho $A$ là tập hợp các hình bình hành có bốn góc bằng nhau, $B$ là tập hợp các hình chữ nhật, $C$ là tập hợp các hình thoi và $D$ là tập hợp các hình vuông.

Hãy nêu mối quan hệ giữa các tập nói trên.

**1.26.** Cho $A = \{0 ; 2 ; 4 ; 6 ; 8\}$, $B = \{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4\}$ và $C = \{0 ; 3 ; 6 ; 9\}$.

a) Xác định $(A \cup B) \cup C$ và $A \cup (B \cup C)$. Có nhận xét gì về kết quả ?

b) Xác định $(A \cap B) \cap C$ và $A \cap (B \cap C)$. Có nhận xét gì về kết quả ?

**1.27.** Cho $A = \{0 ; 2 ; 4 ; 6 ; 8 ; 10\}$, $B = \{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$ và $C = \{4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10\}$. Hãy tìm

a) $A \cap (B \cap C)$ ;    b) $A \cup (B \cup C)$ ;

c) $A \cap (B \cup C)$ ;    d) $(A \cup B) \cap C$ ;

e) $(A \cap B) \cup C$.

**1.28.** Vẽ biểu đồ Ven thể hiện các phép toán sau của các tập $A$, $B$ và $C$ :

a) $A \cap (B \cup C)$;    b) $(A \setminus B) \cup (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$.

**1.29.** Có thể nói gì về các tập $A$ và $B$ nếu các đẳng thức tập hợp sau là đúng :

a) $A \cup B = A$;    b) $A \cap B = A$ ;

c) $A \setminus B = A$ ;    d) $A \setminus B = B \setminus A$.

**1.30.** Liệu có thể kết luận $A = B$ được không nếu $A$, $B$ và $C$ là các tập thoả mãn

a) $A \cup C = B \cup C$ ;    b) $A \cap C = B \cap C$

**1.31.** Với mỗi tập $A$ có một số hữu hạn phần tử, kí hiệu $|A|$ là số phần tử của tập $A$.

Sắp xếp các số sau đây theo thứ tự tăng dần :

a) $|A|$, $|A \cup B|$, $|A \cap B|$ ;    b) $|A \setminus B|$, $|A| + |B|$, $|A \cup B|$.

**1.32.** Cho tập $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < |x| < 3\}$. Hãy biểu diễn $A$ thành hợp của các khoảng.

**1.33.** Biểu diễn tập $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \geq 2\}$ thành hợp các nửa khoảng.

**1.34.** Chứng minh rằng $\sqrt{6}$ là số vô tỉ.

**1.35.** Cho $A = \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{|x-2|} > 2\}$ và $B = \{x \in \mathbb{R} \mid |x-1| < 1\}$. Hãy tìm $A \cup B$ và $A \cap B$.

**1.36.** Cho $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x-1| < 3\}$ và $B = \{x \in \mathbb{R} \mid |x+2| > 5\}$. Hãy tìm $A \cap B$.

## §4. SỐ GẦN ĐÚNG VÀ SAI SỐ

**1.37.** Trong hai số $\frac{17}{12}, \frac{99}{70}$ dùng để xấp xỉ $\sqrt{2}$.

a) Chứng tỏ rằng $\frac{99}{70}$ xấp xỉ $\sqrt{2}$ tốt hơn.

b) Chứng minh rằng sai số tuyệt đối của $\frac{99}{70}$ so với $\sqrt{2}$ nhỏ hơn $7{,}3.10^{-5}$

**1.38.** Các nhà toán học đã xấp xỉ số $\pi$ bởi số $\frac{355}{113}$ Hãy đánh giá sai số tuyệt đối biết $3{,}14159265 < \pi < 3{,}14159266$.

**1.39.** Cho hình chữ nhật $ABCD$. Gọi $AL$ và $CI$ tương ứng là đường cao của các tam giác $ADB$ và $BCD$. Cho biết $DL = LI = IB = 1$. Tính diện tích của hình chữ nhật $ABCD$ (chính xác đến hàng phần trăm).

**1.40.** Trong một thí nghiệm hằng số $C$ được xác định gần đúng là 2,43865 với độ chính xác là $d = 0{,}00312$. Dựa vào $d$, hãy xác định các chữ số chắc của $C$.

**1.41.** Cho $\overline{a} = \frac{1}{1+x}$ $(0 < x < 1)$. Giả sử ta lấy số $a = 1 - x$ làm giá trị gần đúng của $\overline{a}$. Hãy tính sai số tương đối của $a$ theo $x$.

## BÀI TẬP ÔN TẬP CHƯƠNG I

**1.42.** Xét các mệnh đề chứa biến sau :

$P(x)$ : "$x$ là một kĩ sư", $Q(x)$ : "$x$ là một người có tay nghề" và $R(x)$ : "$x$ là một người có thu nhập cao". Gọi $X$ là tập hợp toàn thể loài người. Hãy diễn đạt bằng lời các mệnh đề sau :

a) $\forall x \in X, P(x) \Rightarrow Q(x)$ ;

b) $\forall x \in X, \overline{Q(x)} \Rightarrow \overline{R(x)}$ ;

c) $\forall x \in X, P(x) \Rightarrow R(x)$.

**1.43.** Lập mệnh đề phủ định của mệnh đề

"$\forall n \in \mathbb{N}$, $n^2 + n + 1$ là số nguyên tố".

Mệnh đề phủ định đó đúng hay sai ?

**1.44.** Hãy phát biểu và chứng minh định lí đảo của định lí sau (nếu có) rồi sử dụng thuật ngữ điều kiện cần và đủ để phát biểu gộp cả hai định lí thuận và đảo :

Nếu hai số dương bằng nhau thì trung bình cộng và trung bình nhân của chúng bằng nhau.

**1.45.** Chứng minh các định lí sau bằng phương pháp phản chứng :

a) Trong một tứ giác lồi phải có ít nhất một góc không nhọn (lớn hơn hay bằng góc vuông) và có ít nhất một góc không tù (nhỏ hơn hay bằng góc vuông).

b) Nếu $x$ và $y$ là hai số thực với $x \neq -1$ và $y \neq -1$ thì $x + y + xy \neq -1$.

**1.46.** Cho mệnh đề chứa biến $P(m\,;\,n)$ : "$n$ chia hết cho $m$" với $m$ là số nguyên dương, $n$ là các số tự nhiên. Xác định tính đúng - sai của các mệnh đề sau :

a) $P(4\,;\,5)$ ; b) $P(2\,;\,4)$ ;

c) $\forall n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N}^*, P(m\,;\,n)$ ; d) $\exists m \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}, P(m\,;\,n)$ ;

e) $\exists n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N}^*, P(m\,;\,n)$.

**1.47.** Cho $A$ và $B$ là hai tập hợp hữu hạn. Kí hiệu $|A|$ là số phần tử của tập hợp $A$.

a) Chứng minh rằng nếu $A \cap B = \varnothing$ thì $|A \cup B| = |A| + |B|$.

b) Chứng minh rằng $B \cup (A \setminus B) = A \cup B$ và $B \cap (A \setminus B) = \varnothing$.

c) Chứng minh rằng $A = (A \cap B) \cup (A \setminus B)$.

d) Từ đó suy ra công thức sau

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

**1.48.** Cho $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - 1| > 3\}$ và $B = \{x \in \mathbb{R} \mid |x + 2| < 5\}$. Tìm $A \cap B$.

**1.49.** Người ta gọi một số hữu tỉ $r$ có dạng $r = \dfrac{m}{2^n}$ là số hữu tỉ nhị phân.

Biết rằng trong mỗi khoảng tuỳ ý đều có ít nhất một số hữu tỉ nhị phân. Chứng minh rằng trong mỗi khoảng bất kì đều có ít nhất 100 số hữu tỉ nhị phân.

Một cách tổng quát chứng minh rằng : Cho một số nguyên dương $M$ lớn tuỳ ý. Khi đó, trong mỗi khoảng tuỳ ý đều có ít nhất $M$ số hữu tỉ nhị phân.

**1.50.** Giả sử $x$ là một giá trị gần đúng của $\sqrt{5}$. Xét số $a = \dfrac{2x+5}{x+2}$. Chứng minh rằng

$$|a - \sqrt{5}| < |x - \sqrt{5}|,$$

tức là nếu lấy $a$ là giá trị gần đúng của $\sqrt{5}$ thì ta được độ chính xác cao hơn là lấy $x$.

## GIỚI THIỆU MỘT SỐ CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN

**1.51.** Trong các mệnh đề dưới đây mệnh đề nào đúng, mệnh đề nào sai ?

a) $\forall x \in \mathbb{R}, x > x^2$. ☐ đúng ; ☐ sai

b) $\forall n \in \mathbb{N}$, $n^2 + 1$ không chia hết cho 3. ☐ đúng ; ☐ sai

c) $\forall n \in \mathbb{N}$, $n^2 + 1$ chia hết cho 4. ☐ đúng ; ☐ sai

d) $\exists r \in \mathbb{Q}$, $r^2 = 3$. ☐ đúng ; ☐ sai

*Trong các bài từ 1.52 đến bài 1.54 hãy chọn phương án trả lời đúng trong các phương án đã cho.*

**1.52.** Cho các câu sau :

a) Hải Phòng là một thành phố ở Miền Nam.

b) Sông Hồng chảy qua thủ đô Hà Nội.

c) Hãy trả lời câu hỏi này !

d) $2 + 37 = 39$ ;

e) $5 + 40 = 70$ ;

g) Bạn có rỗi tối nay không ?

h) $x + 2 = 11$ ;

Số câu là mệnh đề trong các câu trên là

(A) 1 ; (B) 2 ; (C) 3 ; (D) 4 ; (E) 5.

**1.53.** Cho mệnh đề chứa biến $P(x)$ : "$x + 15 \le x^2$" với $x$ là số thực. Mệnh đề đúng là mệnh đề :

(A) $P(0)$ ; (B) $P(3)$ ; (C) $P(4)$ ; (D) $P(5)$.

**1.54.** Cho mệnh đề "$\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 + x + 1 > 0$". Mệnh đề phủ định của mệnh đề trên là :

(A) $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 + x + 1 < 0$ ;

(B) $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 + x + 1 \leq 0$ ;

(C) Không tồn tại $x \in \mathbb{R}$ mà $x^2 + x + 1 > 0$ ;

(D) $\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 + x + 1 \leq 0$.

**1.55.** Trong các mệnh đề sau đây mệnh đề nào **không** là định lí :

(A) $\forall n \in \mathbb{N},\ n^2 \vdots 2 \Rightarrow n \vdots 2$ ; (B) $\forall n \in \mathbb{N},\ n^2 \vdots 3 \Rightarrow n \vdots 3$ ;

(C) $\forall n \in \mathbb{N},\ n^2 \vdots 6 \Rightarrow n \vdots 6$ ; (D) $\forall n \in \mathbb{N},\ n^2 \vdots 9 \Rightarrow n \vdots 9$.

**1.56.** Trong các mệnh đề sau đây mệnh đề nào là mệnh đề đúng.

(A) $\forall x \in \mathbb{R},\ x > -2 \Rightarrow x^2 > 4$ ; (B) $\forall x \in \mathbb{R},\ x > 2 \Rightarrow x^2 > 4$ ;

(C) $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 > 4 \Rightarrow x > 2$ ; (D) $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 > 4 \Rightarrow x > -2$.

*Trong các bài từ 1.57 đến 1.63, hãy chọn phương án trả lời đúng trong các phương án đã cho.*

**1.57.** Trong các số dưới đây, giá trị gần đúng của $\sqrt{65} - \sqrt{63}$ với sai số tuyệt đối bé nhất là :

(A) 0,12 ; (B) 0,13 ; (C) 0,14 ; (D) 0,15.

**1.58.** Cho tập $A = \{-1 ; 0 ; 1 ; 2\}$. Khi đó ta cũng có :

(A) $A = [-1 ; 3) \cap \mathbb{N}$ ; (B) $A = [-1 ; 3) \cap \mathbb{Z}$ ;

(C) $A = [-1 ; 3) \cap \mathbb{N}^*$ ; (D) $A = [-1 ; 3) \cap \mathbb{Q}$.

**1.59.** Cho đoạn $M = [-4 ; 7]$ và tập $N = (-\infty ; -2) \cup (3 ; +\infty)$. Khi đó $M \cap N$ là

(A) $[-4 ; -2) \cup (3 ; 7]$ ; (B) $[-4 ; 2) \cup (3 ; 7)$ ;

(C) $(-\infty ; 2] \cup (3 ; +\infty)$ ; (D) $(-\infty ; -2) \cup [3 ; +\infty)$.

**1.60.** Cho hai tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x + 3 < 4 + 2x\}$ ;

$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid 5x - 3 < 4x - 1\}.$$

Tất cả các số tự nhiên thuộc cả hai tập $A$ và $B$ là

(A) 0 và 1 ; (B) 1 ;

(C) 0 ; (D) Không có số nào.

**1.61.** Cho các nửa khoảng $A = (-\infty ; -2]$ ; $B = [3 ; +\infty)$ và khoảng $C = (0 ; 4)$ Khi đó tập $(A \cup B) \cap C$ là

(A) $\{x \in \mathbb{R} \mid 3 \leq x \leq 4\}$ ; (B) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -2 \text{ hoặc } x > 3\}$ ;

(C) $\{x \in \mathbb{R} \mid 3 \leq x < 4\}$ ; (D) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ hoặc } x \geq 3\}$.

**1.62.** Cho các khoảng $A\ (-2 ; 2)$ ; $B = (-1 ; +\infty)$ và $C = \left(-\infty ; \frac{1}{2}\right)$. Khi đó giao $A \cap B \cap C$ là

(A) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq \frac{1}{2}\right\}$ ; (B) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < \frac{1}{2}\right\}$ ;

(C) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x \leq \frac{1}{2}\right\}$ ; (D) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < \frac{1}{2}\right\}$.

**1.63.** Cho số thực $a < 0$. Điều kiện cần và đủ để hai khoảng $(-\infty ; 9a)$ và $\left(\frac{4}{a} ; +\infty\right)$ có giao khác tập rỗng là

(A) $-\frac{2}{3} < a < 0$ ; (B) $-\frac{2}{3} \leq a < 0$ ;

(C) $-\frac{3}{4} < a < 0$ ; (D) $-\frac{3}{4} \leq a < 0$.

## C. ĐÁP SỐ – HƯỚNG DẪN – LỜI GIẢI

**1.1.** Các câu e) và f) là mệnh đề đúng. Các câu c) và g) là mệnh đề sai. Các câu còn lại không phải là mệnh đề.

**1.2.** a) $\overline{P}$ : "Phương trình $x^2 + x + 1 = 0$ vô nghiệm" $\overline{P}$ là mệnh đề đúng.

b) $\overline{Q}$ : "Năm 2000 không phải là năm nhuận" $\overline{Q}$ là mệnh đề sai.

c) $\overline{R}$ : "Số 327 không chia hết cho 3" $\overline{R}$ là mệnh đề sai.

**1.3.** a) $\overline{P}$ "Tứ giác $ABCD$ đã cho không nội tiếp được trong đường tròn".

b) $\overline{Q}$ "Tam giác $ABC$ đã cho không phải là tam giác cân"

c) $\overline{R}$ : "Số 13 không thể biểu diễn thành tổng của hai số chính phương"

d) $\overline{H}$ : "Số $2^{13} - 1$ không là số nguyên tố"

**1.4.** a) "Nếu tam giác *ABC* đã cho vuông tại *A* thì trung tuyến *AM* bằng nửa cạnh *BC*". Mệnh đề này đúng.

b) "Tam giác *ABC* đã cho vuông tại *A* nếu và chỉ nếu trung tuyến *AM* bằng nửa cạnh *BC*" Mệnh đề này đúng.

**1.5.** *P* : "120 chia hết cho 6"

*Q* : "120 chia hết cho 9"

Mệnh đề *R* sai vì *P* đúng *Q* sai.

**1.6.** "Do 42 chia hết cho 5 nên nó chia hết cho 10" Mệnh đề này đúng vì *P* là mệnh đề sai (cho dù *Q* đúng hay sai).

**1.7.** "Nếu $2^{2003} - 1$ là số nguyên tố thì 16 là số chính phương" Mệnh đề này đúng vì *Q* là mệnh đề đúng (cho dù *P* đúng hay sai).

**1.8.** "Nếu $\widehat{A} = \widehat{D}$, $\widehat{B} = \widehat{E}$ thì tam giác *ABC* đồng dạng với tam giác *DEF*"

Mệnh đề này đúng.

**1.9.** "7 là số nguyên tố nếu và chỉ nếu 6! + 1 chia hết cho 7".

"Điều kiện cần và đủ để 7 là số nguyên tố là 6! + 1 chia hết cho 7"

Mệnh đề đúng vì cả hai mệnh đề *P* và *Q* cùng đúng.

**1.10.** "6 là số nguyên tố nếu và chỉ nếu 5! + 1 chia hết cho 6".

"6 là số nguyên tố khi và chỉ khi 5! + 1 chia hết cho 6".

Mệnh đề đúng vì cả hai mệnh đề *P* và *Q* đều sai.

**1.11.** a) "Có một bạn học ở lớp 10 ở trường em tự học ít nhất 4 giờ trong một ngày"

b) "Mọi học sinh lớp 10 ở trường em tự học ít nhất 4 giờ trong một ngày".

c) "Có một bạn lớp 10 ở trường em tự học ít hơn 4 giờ trong một ngày"

d) "Mọi học sinh lớp 10 ở trường em tự học ít hơn 4 giờ trong một ngày".

**1.12.** a) "$\forall x \in X, P(x)$" trong đó *X* là tập hợp tất cả các học sinh ở trường em, $P(x)$ là mệnh đề chứa biến : "*x* học luật giao thông"

b) $\exists x \in X, P(x)$" trong đó *X* là tập hợp tất cả các học sinh lớp 12 ở trường em, $P(x)$ là mệnh đề chứa biến : "*x* có điện thoại di động"

**1.13.** a) Mệnh đề đúng ; b) Mệnh đề đúng ;

c) Mệnh đề sai ; d) Mệnh đề sai ;

e) Mệnh đề đúng ; g) Mệnh đề sai.

**1.14.** a) $\exists x \in \mathbb{R},\ x \leq x^2$

b) $\exists n \in \mathbb{N},\ n^2 + 1$ chia hết cho 3.

c) $\exists n \in \mathbb{N},\ n^2 + 1$ không chia hết cho 4"

d) $\forall r \in \mathbb{Q},\ r^2 \neq 3$.

**1.15.** a) Mệnh đề đúng vì với $r = \frac{1}{2}$ thì $4r^2 - 1 = 0$. Mệnh đề phủ định là "$\forall r \in \mathbb{Q},\ 4r^2 - 1 \neq 0$"

b) Mệnh đề sai. Ta chứng tỏ mệnh đề phủ định "$\forall n \in \mathbb{N},\ n^2 + 1$ không chia hết cho 8" là đúng. Thật vậy, nếu $n$ là số chẵn thì $n^2 + 1$ là số lẻ nên không chia hết cho 8. Nếu $n$ là số lẻ, $n = 2k + 1$ ($k \in \mathbb{N}$) thì

$n^2 + 1 = 4k(k + 1) + 2$ chia 8 dư 2 ( vì $k(k + 1)$ là số chẵn).

c) Mệnh đề đúng. Mệnh đề phủ định "$\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 + x + 1 \leq 0$"

d) Mệnh đề sai. Ta chứng tỏ mệnh đề phủ định "$\exists n \in \mathbb{N}^*,\ 1 + 2 + \cdots + n$ chia hết cho 11" là đúng. Thật vậy với $n = 11$ thì $1 + 2 + \cdots + 11 = 66$ chia hết cho 11.

**1.16.** a) $\forall x \in X, P(x)$.

b) $\exists x \in X, \overline{P(x)}$, nghĩa là "Có một bạn học sinh của trường em không thích môn Ngữ văn".

**1.17.** a) "$\exists x \in X, P(x)$"

b) Mệnh đề phủ định : "$\forall x \in X, \overline{P(x)}$" nghĩa là : "Mọi người trong khu phố (hay xã) em đều chưa đi máy bay"

**1.18.** a) "Nếu $n$ là số tự nhiên sao cho $n^2$ chia hết cho 3 thì $n$ cũng chia hết cho 3". Ta chứng minh bằng phản chứng. Giả sử tồn tại $n \in \mathbb{N}$ để $n^2$ chia hết cho 3 nhưng $n$ không chia hết cho 3. Nếu $n = 3k + 1$ ($k \in \mathbb{N}$) thì $n^2 = 3k(3k + 2) + 1$ không chia hết cho 3. Nếu $n = 3k - 1$ ($k \in \mathbb{N}$) thì $n^2 = 3k(3k - 2) + 1$ không chia hết cho 3.

b) "Nếu $n$ là số tự nhiên sao cho $n^2$ chia hết cho 6 thì $n$ cũng chia hết cho 6". Thật vậy nếu $n^2$ chia hết cho 6 thì $n^2$ là số chẵn, do đó $n$ là số chẵn, tức là $n$ chia hết cho 2. Vì $n^2$ chia hết cho 6 nên nó chia hết cho 3. Theo câu a) điều này kéo theo $n$ chia hết cho 3. Vì $n$ chia hết cho 2 và 3 nên $n$ chia hết cho 6.

**1.19.** a) Phát biểu : " Với mọi số tự nhiên $n$, nếu $n$ chẵn thì $7n + 4$ là số chẵn."

*Chứng minh.* Nếu $n$ chẵn thì $7n$ chẵn. Suy ra $7n + 4$ chẵn vì tổng hai số chẵn là số chẵn.

b) Định lí đảo : "$\forall n \in \mathbb{N}, Q(n) \Rightarrow P(n)$" tức là "Với mọi số tự nhiên $n$, nếu $7n + 4$ là số chẵn thì $n$ chẵn"

*Chứng minh.* Nếu $7n + 4 = m$ chẵn thì $7n = m - 4$ chẵn. Vậy $7n$ chẵn nên $n$ chẵn.

c) Phát biểu gộp hai định lí thuận và đảo như sau : "Với mọi số tự nhiên $n$, $n$ chẵn khi và chỉ khi $7n + 4$ chẵn" hoặc "Với mọi số tự nhiên $n$, $n$ chẵn nếu và chỉ nếu $7n + 4$ chẵn".

**1.20.** a) Phát biểu như sau : "Điều kiện cần và đủ để số tự nhiên $n$ chia hết cho 5 là $n^2$ chia hết cho 5"

*Chứng minh.* Nếu $n = 5k$ $(k \in \mathbb{N})$ thì $n^2 = 25k^2$ chia hết cho 5. Ngược lại, giả sử $n = 5k + r$ với $r = 0, 1, 2, 3, 4$. Khi đó $n^2 = 25k^2 + 10kr + r^2$ chia hết cho 5 nên $r^2$ phải chia hết cho 5. Thử vào với $r = 0, 1, 2, 3, 4$, ta thấy chỉ có với $r = 0$ thì $r^2$ mới chia hết cho 5. Do đó $n = 5k$ tức là $n$ chia hết cho 5.

b) Phát biểu như sau : "Điều kiện cần và đủ để số tự nhiên $n$ chia hết cho 5 là cả $n^2 - 1$ và $n^2 + 1$ đều không chia hết cho 5"

*Chứng minh.* Nếu $n$ chia hết cho 5 thì $n^2 - 1$ chia 5 dư 4 và $n^2 + 1$ chia 5 dư 1. Đảo lại, giả sử $n^2 - 1$ và $n^2 + 1$ đều không chia hết cho 5. Gọi $r$ là số dư khi chia $n$ cho 5 $(r = 0, 1, 2, 3, 4)$. Ta có $n = 5k + r$ $(k \in \mathbb{N})$. Vì $n^2 = 25k^2 + 10kr + r^2$ nên suy ra cả $r^2 - 1$ và $r^2 + 1$ đều không chia hết cho 5. Với $r = 1$ thì $r^2 - 1 = 0$ chia hết cho 5. Với $r = 2$ thì $r^2 + 1 = 5$ chia hết cho 5. Với $r = 3$ thì $r^2 + 1 = 10$ chia hết cho 5. Với $r = 4$ thì $r^2 - 1 = 15$ chia hết cho 5. Vậy chỉ có thể $r = 0$ tức là $n = 5k$ hay $n$ chia hết cho 5.

**1.21.** Chứng minh bằng phản chứng như sau :

Giả sử trái lại tất cả các số $a_1, a_2, \ldots, a_n$ đều nhỏ hơn $a$. Khi đó $a_1 + a_2 + \cdots + a_n < na$ suy ra $a = \dfrac{a_1 + \cdots + a_n}{n} < a$. Mâu thuẫn.

**1.22.** a) Điều kiện đủ để hai tam giác đồng dạng là chúng bằng nhau.

b) Để một hình thang là hình thang cân, điều kiện đủ là hai đường chéo của nó bằng nhau.

c) Điều kiện đủ để đường trung tuyến xuất phát từ $A$ của tam giác $ABC$ vuông góc với $BC$ là tam giác đó cân tại $A$.

**1.23.** a) Để một số nguyên dương lẻ biểu diễn thành tổng của hai số chính phương điều kiện cần là số đó có dạng $4k + 1$.

b) Cho $m$, $n$ là hai số nguyên dương. Điều kiện cần để $m^2 + n^2$ là số chính phương là tích $mn$ chia hết cho 12.

**1.24.** Định lí đảo : "Nếu $m$, $n$ là hai số nguyên dương và $m^2 + n^2$ chia hết cho 3 thì cả $m$ và $n$ đều chia hết cho 3"

*Chứng minh.* Nếu một số không chia hết cho 3 và số kia chia hết cho 3 thì rõ ràng tổng bình phương hai số đó không chia hết cho 3. Giả sử $m$ và $n$ đều không chia hết cho 3. Nếu $m = 3k + 1$ hoặc $m = 3k + 2$ ta đều có $m^2$ chia 3 dư 1. Thành thử $m^2 + n^2$ chia 3 dư 2. Vậy nếu $m^2 + n^2$ chia hết cho 3 thì chỉ có thể xảy ra khả năng cả $m$ và $n$ đều chia hết cho 3.

Vậy : Điều kiện cần và đủ để $m^2 + n^2$ chia hết cho 3 ($m, n \in \mathbb{N}^*$) là cả $m$ và $n$ đều chia hết cho 3.

**1.25.** Ta có $A = B$ ; $D \subset B = A$ ; $D \subset C$ ; $D = B \cap C$.

**1.26.** a) $A \cup B = \{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 8\}$, $(A \cup B) \cup C = \{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 8 ; 9\}$.

$B \cup C = \{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 9\}$, $A \cup (B \cup C) = \{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 8 ; 9\}$.

Ta có $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.

b) $A \cap B = \{0 ; 2 ; 4\}$, $(A \cap B) \cap C = \{0\}$.

$B \cap C = \{0 ; 3\}$, $A \cap (B \cap C) = \{0\}$.

Ta có

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$

*Chú ý :* Có thể chứng minh được rằng các đẳng thức trên luôn đúng với $A$, $B$, $C$ là ba tập hợp bất kì.

**1.27.** a) $A \cap (B \cap C) = \{4 ; 6\}$ ;

b) $A \cup (B \cup C) = \{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10\}$.

c) $A \cap (B \cup C) = A$.

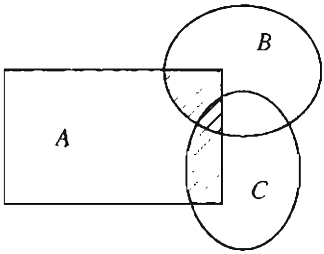
d) $A \cup B = \{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 8 ; 10\}$.

Vậy $(A \cup B) \cap C = \{4 ; 5 ; 6 ; 8 ; 10\}$.

e) $A \cap B = \{0 ; 2 ; 4 ; 6\}$.

Vậy $(A \cap B) \cup C = \{0 ; 2 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10\}$.

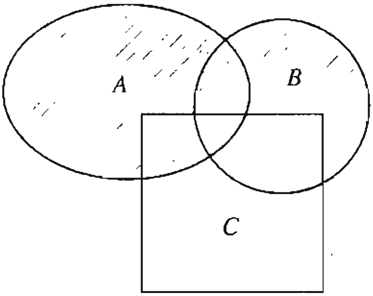
**1.28.** a) b)



Phần gạch chéo là hình biểu diễn

$A \cap (B \cup C)$

*Hình 1.1*



Phần gạch chéo là hình biểu diễn

$(A \backslash B) \cup (A \backslash C) \cup (B \backslash C)$

*Hình 1.2*

**1.29.** a) Nếu $A \cup B = A$ thì $B$ là tập con của $A$ vì theo định nghĩa ta luôn có $B \subset A \cup B$. Dễ kiểm tra rằng điều ngược lại cũng đúng. Vậy $A \cup B = A$ nếu và chỉ nếu $B$ là tập con của $A$.

b) Nếu $A \cap B = A$ thì $A$ là tập con của $B$ vì theo định nghĩa ta luôn có $A \cap B \subset B$.

c) Nếu $A \setminus B = A$ thì hai tập $A$ và $B$ phải không giao nhau. Thật vậy, nếu tồn tại $x \in A$ và $x \in B$ thì do $A = A \setminus B$ nên $x \in A \setminus B$. Suy ra $x$ không thuộc $B$ (mâu thuẫn). Ngược lại bằng cách vẽ biểu đồ Ven dễ thấy nếu $A \cap B = \varnothing$ thì $A \setminus B = A$ cũng đúng. Vậy $A \setminus B = A$ nếu và chỉ nếu $A \cap B = \varnothing$.

d) Nếu $A \setminus B = B \setminus A$ thì $A = B$. Thật vậy nếu $A \neq B$ thì phải có một phần tử của tập này nhưng không thuộc tập kia, chẳng hạn $x \in A$ và $x \notin B$ suy ra $x \in A \setminus B$ nên $x \in B \setminus A$ do đó $x \in B$ và $x \notin A$ (mâu thuẫn). Dễ kiểm tra rằng điều ngược lại cũng đúng. Vậy $A \setminus B = B \setminus A$ nếu và chỉ nếu $A = B$.

**1.30.** a) Không. Chẳng hạn $A = \{1 ; 2 ; 3 ; 4\}$, $B = \{1 ; 2\}$, $C = \{3 ; 4 ; 5\}$. Ta có $A \neq B$ nhưng

$$A \cup C = B \cup C = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5\}.$$

b) Không. Chẳng hạn $A = \{1 ; 2 ; 3 ; 4\}$, $B = \{3 ; 4\}$, $C = \{3 ; 4 ; 5\}$. Ta có $A \neq B$ nhưng

$$A \cap C = B \cap C = \{3 ; 4\}.$$

**1.31.** a) $|A \cap B|$, $|A|$, $|A \cup B|$ ;

b) $|A \setminus B|$, $|A \cup B|$, $|A| + |B|$.

**1.32.** $A = (2 ; 3) \cup (-3 ; -2)$.

**1.33.** $A = [2, +\infty) \cup (-\infty ; -2]$.

**1.34.** Chứng minh bằng phản chứng. Giả sử $\sqrt{6} = \dfrac{a}{b}$ là một số hữu tỉ trong đó $a$, $b$ là hai số nguyên dương và $(a, b) = 1$. Suy ra $6b^2 = a^2$ Vậy $a^2$ chia hết cho 2 và chia hết cho 3. Suy ra $a$ chia hết cho 2 và chia hết cho 3 tức là $a$ chia hết cho 6. Đặt $a = 6k$ ($k \in \mathbb{N}^*$). Thay vào ta được $6b^2 = 36k^2$ hay $b^2 = 6k^2$ Lí luận tương tự như trên ta suy ra $b$ chia hết cho 6. Vậy $a$ và $b$ có ước chung là 6. Điều này mâu thuẫn với giả thiết $a$, $b$ không có ước chung lớn hơn 1.

**1.35.** Ta có $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < |x - 2| < 0{,}5\}$, suy ra $A = (1{,}5 ; 2{,}5) \setminus \{2\}$. Dễ thấy $B = (0 ; 2)$.

Từ đó

$$A \cup B = (0 ; 2{,}5) \setminus \{2\} \text{ và } A \cap B = (1{,}5 ; 2).$$

**1.36.** Ta có $A = (-2 ; 4)$ và $B = (3, +\infty) \cup (-\infty ; -7)$. Vậy $A \cap B = (3 ; 4)$.

**1.37.** a) Ta có $\sqrt{2} < \dfrac{99}{70} < \dfrac{17}{12}$ do đó $\dfrac{99}{70}$ xấp xỉ $\sqrt{2}$ tốt hơn

b) Ta có $\dfrac{99}{70} = 1{,}414285714... < 1{,}414286$,

$\sqrt{2} \approx 1{,}4142135... > 1{,}414213$.

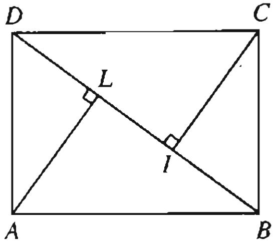
Do đó $0 < \dfrac{99}{70} - \sqrt{2} < 1{,}414286 - 1{,}414213 \approx 0{,}000073$.

**1.38.** Ta có (sử dụng máy tính bỏ túi) :

$$\frac{355}{113} \approx 3{,}14159292... < 3{,}14159293.$$

Do vậy $0 < \frac{355}{113} - \pi < 3{,}14159293 - 3{,}14159265 \approx 0{,}00000028$. Vậy sai số tuyệt đối nhỏ hơn $2{,}8.10^{-7}$

**1.39.** Ta có $AL^2 = BL.LD = 2$, do đó $AL = \sqrt{2}$. Lại có $BD = 3$, suy ra diện tích của hình chữ nhật là $3\sqrt{2} = 3.1{,}41421356...$ $\approx 4{,}24264... \approx 4{,}24$.



*Hình 1.3*

**1.40.** Chữ số 3 (hàng phần trăm) là chữ số chắc do $0{,}00312 < 0{,}005$. Do đó $C$ có 3 chữ số chắc (ở hàng đơn vị, hàng phần chục và hàng phần trăm).

**1.41.** $\Delta_{\bar{a}} = \frac{1}{1+x} - (1-x) = \frac{x^2}{1+x}$. Sai số tương đối là $\delta_a = \frac{\Delta_{\bar{a}}}{1-x} = \frac{x^2}{1-x^2}$.

**1.42.** a) Nếu một người là kĩ sư thì người đó có tay nghề.

b) Nếu một người không có tay nghề thì người đó không có thu nhập cao.

c) Nếu một người là kĩ sư thì người ấy có thu nhập cao.

**1.43.** Mệnh đề phủ định là "$\exists n \in \mathbb{N}$, $n^2 + n + 1$ không là số nguyên tố" Mệnh đề phủ định đúng. Ví dụ với $n = 4$ thì $n^2 + n + 1 = 21$ chia hết cho 3 nên là hợp số.

**1.44.** Định lí đảo : "Nếu hai số dương $a$, $b$ có trung bình cộng và trung bình nhân bằng nhau thì chúng bằng nhau.'

*Chứng minh*. Giả sử $a$, $b$ là hai số dương sao cho $\frac{a+b}{2} = \sqrt{ab}$ Khi đó

$$a + b - 2\sqrt{ab} = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = 0 \Rightarrow a = b.$$

Vậy điều kiện cần và đủ để hai số dương bằng nhau là trung bình cộng và trung bình nhân của chúng bằng nhau.

**1.45.** a) Giả sử cả bốn góc đều nhọn. Khi đó tổng của bốn góc của tứ giác sẽ nhỏ hơn 360° (mâu thuẫn). Tương tự giả sử cả bốn góc đều tù. Khi đó tổng của bốn góc của tứ giác sẽ lớn hơn 360° (mâu thuẫn).

b) Giả sử $x + y + xy = -1$. Suy ra $x + y + xy + 1 = (x + 1)(y + 1) = 0$. Vậy phải có hoặc $x = -1$ hoặc $y = -1$ (mâu thuẫn).

**1.46.** a) Mệnh đề sai.

b) Mệnh đề đúng.

c) Mệnh đề sai.

d) Mệnh đề đúng (vì với $m = 1$ thì $n$ chia hết cho $m$ với mọi $n$).

e) Mệnh đề đúng (vì với $n = 0$ thì $n$ chia hết cho $m$ với mọi $m$).

**1.47.** a) Hiển nhiên.

b) Dễ thấy bằng cách vẽ sơ đồ Ven.

c) Dễ thấy bằng cách vẽ sơ đồ Ven.

d) Ta có $|A \cup B| = |B| + |A \setminus B|$, (do câu a) và b)). (1)

Lại có $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$ ( do c) ) thành thử

$$|A| = |A \setminus B| + |A \cap B|.$$

Vậy

$$|A \setminus B| = |A| - |A \cap B|. \qquad (2)$$

Thay (2) vào (1) ta được

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

**1.48.** Ta có $A = (4 ; +\infty) \cup (-\infty ; -2)$ ; $B = (-7 ; 3)$.

Vậy $A \cap B = (-7 ; -2)$.

**1.49.** Giả sử $(a ; b)$ là một khoảng bất kì. Ta chia $(a ; b)$ làm 100 khoảng con rời nhau. Theo nhận xét trên trong mỗi khoảng con đó đều có chứa một số hữu tỉ nhị phân. Các số hữu tỉ nhị phân này khác nhau do các khoảng con không giao nhau. Vậy $(a ; b)$ chứa ít nhất 100 số hữu tỉ nhị phân.

Mở rộng : Ta chia khoảng $(a ; b)$ làm $M$ khoảng con rời nhau. Theo nhận xét trên trong mỗi khoảng con đó đều có chứa một số hữu tỉ nhị phân. Các số hữu tỉ nhị phân này khác nhau do các khoảng con không giao nhau. Vậy $(a ; b)$ chứa ít nhất $M$ số hữu tỉ nhị phân.

**1.50.** Đặt $u = x - \sqrt{5}$ và $v = a - \sqrt{5}$ Ta có

$$v = a - \sqrt{5} = \frac{2x + 5 - x\sqrt{5} - 2\sqrt{5}}{x + 2} = \frac{(2 - \sqrt{5})(x - \sqrt{5})}{x + 2} = \frac{(2 - \sqrt{5})u}{x + 2}$$

Vậy

$$\left|a-\sqrt{5}\right| = |v| = |u| \frac{\sqrt{5}-2}{x+2} < \frac{\sqrt{5}-2}{2}|u| < |u| = \left|x-\sqrt{5}\right|.$$

**1.51.** Câu a) là mệnh đề sai.

Câu b) là mệnh đề đúng. Thật vậy nếu $n = 3k$ thì $n^2 + 1 = 9k^2 + 1$ chia 3 dư 1. Nếu $n = 3k + 1$ thì $n^2 + 1 = 9k^2 + 6k + 2$ chia 3 dư 2. Nếu $n = 3k + 2$ thì $n^2 + 1 = 9k^2 + 12k + 5$ chia 3 dư 2.

Câu c) là mệnh đề sai. Thật vậy nếu $n = 2k$ thì $n^2 + 1 = 4k^2 + 1$ chia 4 dư 1. Nếu $n = 2k + 1$ thì $n^2 + 1 = 4k^2 + 4k + 2$ chia 4 dư 2.

Câu d) là mệnh đề sai do $\sqrt{3}$ là số vô tỉ.

**1.52.** Phương án (D). (Các câu a), b), d), e) là các mệnh đề).

**1.53.** Phương án (D).

**1.54.** Phương án (D).

**1.55.** Các mệnh đề (A), (B) và (C) là mệnh đề đúng Mệnh đề (D) là sai vì với $n = 3$ thì $3^2 = 9$ chia hết cho 9 nhưng 3 không chia hết cho 9. Do đó mệnh đề (D) không phải là định lí. Vậy ta chọn phương án (D).

**1.56.** (A) là mệnh đề sai. Thật vậy với $x = 0$ thì $0 > -2$ nhưng $0 < 4$.

(B) là mệnh đề đúng.

(C) là mệnh đề sai. Thật vậy với $x = -3$ thì $(-3)^2 = 9 > 4$ nhưng $-3 < 2$.

(D) là mệnh đề sai vì chẳng hạn, khi $x = -3$ thì $(-3)^2 > 4$ nhưng $-3 < -2$.

Do đó ta chọn phương án (B).

**1.57.** Sử dụng máy tính cho ta $\sqrt{65} - \sqrt{63} \approx 0,125003815...$

Do đó ta chọn phương án (B).

**1.58.** Phương án (B).

**1.59.** Phương án (A).

**1.60.** Phương án (A).

**1.61.** Phương án (C).

**1.62.** Phương án (D).

**1.63.** Phương án (A).

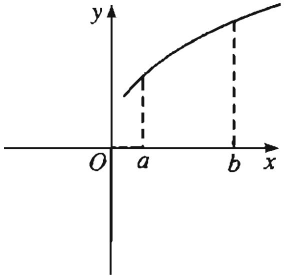
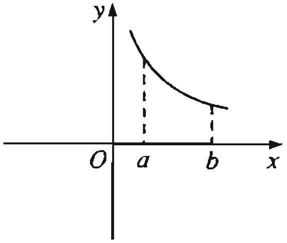
# Chương II

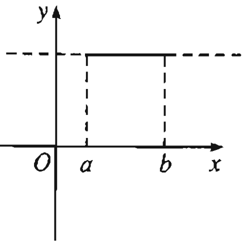
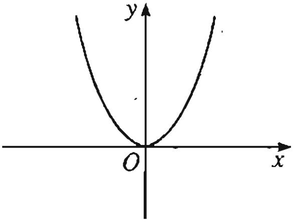
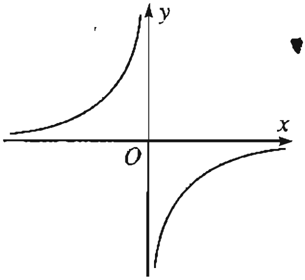
# HÀM SỐ

## A. NHỮNG KIẾN THỨC CẦN NHỚ

### Hàm số

Trong bảng sau đây, $y = f(x)$ là một hàm số với tập xác định $\mathcal{D}$, $K$ là một khoảng (nửa khoảng hay đoạn) nằm trong $\mathcal{D}$.

| *Tính chất của hàm số* | *Thể hiện qua đồ thị* |
|---|---|
| $y_0 = f(x_0)$ (với $x_0$ thuộc $\mathcal{D}$). | Điểm $(x_0 ; y_0)$ thuộc đồ thị của hàm số. |
| Hàm số $f$ đồng biến trên $K$ :<br>$\forall x_1, x_2 \in K : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$. |  <br>Trên $K$, đồ thị của hàm số $f$ đi lên (theo chiều tăng của đối số). |
| Hàm số $f$ nghịch biến trên $K$ :<br>$\forall x_1, x_2 \in K : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$. |  <br>Trên $K$, đồ thị của hàm số $f$ đi xuống (theo chiều tăng của đối số). |

| | |
|---|---|
| Hàm số $f$ không đổi trên $K$ :<br>$y = m$ ($m$ là hằng số). |  <br>Đồ thị của hàm số $f$ nằm trên đường thẳng song song (hoặc trùng) với $Ox$. |
| $y = f(x)$ là hàm số chẵn :<br>$\forall x \in \mathcal{D} : -x \in \mathcal{D}$ và $f(-x) = f(x)$. |  <br>Đồ thị của hàm số $f$ có trục đối xứng là trục tung $Oy$. |
| $y = f(x)$ là hàm số lẻ :<br>$\forall x \in \mathcal{D} : -x \in \mathcal{D}$ và $f(-x) = -f(x)$. |  <br>Đồ thị của hàm số $f$ có tâm đối xứng là gốc toạ độ $O$. |

## Hàm số bậc nhất

- Hàm số cho bởi biểu thức $y = ax + b$ $(a \neq 0)$. Tập xác định : $\mathbb{R}$

- Bảng biến thiên :

| $x$ | $-\infty$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $y = ax + b$<br>$(a > 0)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

| $x$ | $-\infty$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $y = ax + b$<br>$(a < 0)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

- Đồ thị của hàm số $y = ax + b$ $(a \neq 0)$ là đường thẳng có hệ số góc bằng $a$, cắt $Ox$ tại $(-\frac{b}{a}; 0)$ và cắt $Oy$ tại $(0 ; b)$.

- Nếu $(d_1)$ và $(d_2)$ là hai đường thẳng phân biệt có hệ số góc là $a_1$ và $a_2$ thì :

$$(d_1) \,//\, (d_2) \Leftrightarrow a_1 = a_2 ;$$

$$(d_1) \text{ cắt } (d_2) \Leftrightarrow a_1 \neq a_2 ;$$

$$d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow a_1 . a_2 = -1.$$

## Hàm số bậc hai

- Hàm số cho bởi biểu thức $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$. Tập xác định : $\mathbb{R}$

- Bảng biến thiên :

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{b}{2a}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y = ax^2 + bx + c$<br>$(a > 0)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $-\frac{\Delta}{4a}$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{b}{2a}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y = ax^2 + bx + c$<br>$(a < 0)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $-\frac{\Delta}{4a}$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

- Đồ thị của hàm số $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ là parabol có đỉnh là điểm $\left(-\frac{b}{2a} ; -\frac{\Delta}{4a}\right)$ ; có trục đối xứng là đường thẳng $x = -\frac{b}{2a}$; hướng bề lõm lên trên khi $a > 0$ và xuống dưới khi $a < 0$.

### ) Phép tịnh tiến đồ thị

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị $(G)$ ; $p$ và $q$ là hai số không âm.

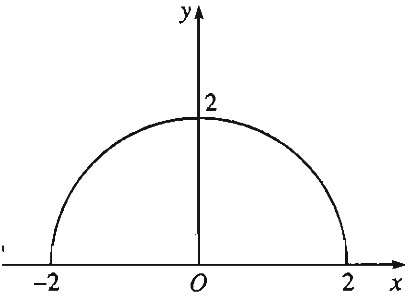
- Khi tịnh tiến $(G)$ lên trên $q$ đơn vị, ta được đồ thị của hàm số $y = f(x) + q$.
- Khi tịnh tiến $(G)$ xuống dưới $q$ đơn vị, ta được đồ thị của hàm số $y = f(x) - q$.
- Khi tịnh tiến $(G)$ sang trái $p$ đơn vị, ta được đồ thị của hàm số $y = f(x + p)$.
- Khi tịnh tiến $(G)$ sang phải $p$ đơn vị, ta được đồ thị của hàm số $y = f(x - p)$.

## B. ĐỀ BÀI

## §1. ĐẠI CƯƠNG VỀ HÀM SỐ

### Khái niệm hàm số

**2.1.** Đường tròn tâm $O$ bán kính $r$ không phải là đồ thị của một hàm số. Nhưng nửa đường tròn gồm các điểm có tung độ không âm của đường tròn tâm $O$ bán kính $r$ (h. 2.1) là đồ thị của một hàm số. Hãy viết biểu thức xác định hàm số đó và cho biết tập xác định của nó, biết rằng đường tròn tâm $O$ bán kính $r$ là tập hợp các điểm có toạ độ $(x\ ;\ y)$ thoả mãn hệ thức $x^2 + y^2 = r^2$



*Hình 2.1*

Nửa đường tròn bán kính $r = 2$

**2.2.** Tìm tập xác định của các hàm số sau :

a) $y = \dfrac{x-1}{x^2-1}$ ;

b) $y = \dfrac{\sqrt{2x+1}}{2x^2 - x - 1}$ ;

c) $y = \dfrac{3x+4}{(x-2)\sqrt{x+4}}$.

**2.3.** Cho hàm số

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x+1} & \text{nếu } x > 0, \\ \dfrac{\sqrt[3]{x+1}}{x-1} & \text{nếu } -1 \le x \le 0. \end{cases}$$

a) Tìm tập xác định của hàm số $y = f(x)$.

b) Tính $f(0), f(2), f(-3), f(-1)$.

**2.4.** Cho hàm số $f(x) = x^2 + \sqrt{x-1}$.

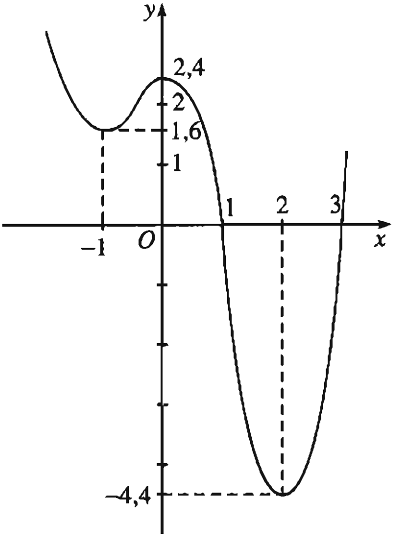
a) Tìm tập xác định của hàm số.

b) Dùng bảng số hoặc máy tính bỏ túi, tính giá trị gần đúng của $f(4)$, $f(\sqrt{2})$, $f(\pi)$ chính xác đến hàng phần trăm.

### Sự biến thiên của hàm số

**2.5.** Hãy lập bảng biến thiên của hàm số có đồ thị là nửa đường tròn cho trên hình 2.1.

**2.6.** Đồ thị của một hàm số xác định trên $\mathbb{R}$ được cho trên hình 2.2. Dựa vào đồ thị, hãy lập bảng biến thiên của hàm số đó. Hãy cho biết giá trị lớn nhất hay nhỏ nhất của hàm số (nếu có).



*Hình 2.2*

**2.7.** Bằng cách xét tỉ số $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$, hãy nêu sự biến thiên của các hàm số sau (không yêu cầu lập bảng biến thiên của nó) trên các khoảng đã cho :

a) $y = x^2 + 4x + 1$ trên mỗi khoảng $(-\infty ; -2)$ và $(-2 ; +\infty)$ ;

b) $y = -x^2 + 2x + 5$ trên mỗi khoảng $(-\infty ; 1)$ và $(1 ; +\infty)$ ;

c) $y = \dfrac{x}{x+1}$ trên mỗi khoảng $(-\infty ; -1)$ và $(-1 ; +\infty)$ ;

d) $y = \dfrac{2x+3}{-x+2}$ trên mỗi khoảng $(-\infty ; 2)$ và $(2 ; +\infty)$.

## Hàm số chẵn và hàm số lẻ

**2.8.** Có hay không một hàm số xác định trên $\mathbb{R}$ vừa là hàm số chẵn vừa là hàm số lẻ ?

**2.9.** Cho hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$. Đặt $S(x) = f(x) + g(x)$ và $P(x) = f(x)g(x)$. Chứng minh rằng :

a) Nếu $y = f(x)$ và $y = g(x)$ là những hàm số chẵn thì $y = S(x)$ và $y = P(x)$ cũng là những hàm số chẵn.

b) Nếu $y = f(x)$ và $y = g(x)$ là những hàm số lẻ thì $y = S(x)$ là hàm số lẻ và $y = P(x)$ là hàm số chẵn.

c) Nếu $y = f(x)$ là hàm số chẵn, $y = g(x)$ là hàm số số lẻ thì $y = P(x)$ là hàm số lẻ.

**2.10.** Xét tính chẵn lẻ của các hàm số sau :

a) $y = 3x^4 + 3x^2 - 2$ ;
b) $y = 2x^3 - 5x$ ;

c) $y = x|x|$ ;
d) $y = \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}$ ;

e) $y = \sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}$.

## Tịnh tiến đồ thị song song với trục toạ độ

**2.11.** Trong mặt phẳng toạ độ, cho các điểm $A(-1 ; 3)$, $B(2 ; -5)$, $C(a ; b)$. Hãy tính toạ độ các điểm có được khi tịnh tiến các điểm đã cho :

a) Lên trên 5 đơn vị ;
b) Xuống dưới 3 đơn vị ;

c) Sang phải 1 đơn vị ;
d) Sang trái 4 đơn vị.

**2.12.** Hàm số $y = 4x - 3$ có đồ thị là đường thẳng $(d)$.

a) Gọi $(d_1)$ là đường thẳng có được khi tịnh tiến $(d)$ lên trên 4 đơn vị. Hỏi $(d_1)$ là đồ thị của hàm số nào ?

b) Gọi $(d_2)$ là đường thẳng có được khi tịnh tiến $(d)$ sang trái 1 đơn vị. Hỏi $(d_2)$ là đồ thị của hàm số nào ?

c) Em có nhận xét gì về hai kết quả trên ?

**2.13.** Giả sử hàm số $y = \dfrac{-2}{x}$ có đồ thị là $(H)$.

a) Nếu tịnh tiến $(H)$ xuống dưới 3 đơn vị thì ta được đồ thị của hàm số nào ?

b) Nếu tịnh tiến $(H)$ sang phải 2 đơn vị thì ta được đồ thị của hàm số nào ?

c) Nếu tịnh tiến $(H)$ lên trên 1 đơn vị rồi sang trái 4 đơn vị thì ta được đồ thị của hàm số nào ?

## §2. HÀM SỐ BẬC NHẤT

**2.14.** Vẽ đồ thị của mỗi hàm số sau :

a) $y = 2x - 3$ ;  b) $y = -\dfrac{1}{2}x + 1$ ;  c) $y = \dfrac{\sqrt{3}}{2}x + 2$.

**2.15.** Trong mỗi trường hợp sau, tìm các giá trị của $k$ sao cho đồ thị của hàm số $y = -2x + k(x + 1)$

a) Đi qua gốc toạ độ $O$ ;

b) Đi qua điểm $M(-2 ; 3)$ ;

c) Song song với đường thẳng $y = \sqrt{2}\,x$.

**2.16.** Tìm các cặp đường thẳng song song trong các đường thẳng cho sau đây :

a) $3y - 6x + 1 = 0$ ;  b) $y = -0{,}5\,x - 4$ ;

c) $y = 3 + \dfrac{x}{2}$ ;  d) $2y + x = 6$ ;

e) $2x - y = 1$ ;  f) $y = 0{,}5x + 1$.

**2.17.** Vẽ đồ thị của mỗi hàm số sau và lập bảng biến thiên của nó :

a) $y = |3x + 5|$ ;

b) $y = -2|x - 1|$ ;

c) $y = -\dfrac{1}{2}|2x + 3| + \dfrac{5}{2}$.

**2.18.** Trong mỗi trường hợp sau, xác định $a$ và $b$ sao cho đường thẳng $y = ax + b$

a) Cắt đường thẳng $y = 2x + 5$ tại điểm có hoành độ bằng $-2$ và cắt đường thẳng $y = -3x + 4$ tại điểm có tung độ bằng $-2$ ;

b) Song song với đường thẳng $y = \frac{1}{2}x$ và đi qua giao điểm của hai đường thẳng $y = -\frac{1}{2}x + 1$ và $y = 3x + 5$.

**2.19.** a) Cho điểm $A(x_0 \,;\, y_0)$. Hãy xác định toạ độ của điểm $B$, biết rằng $B$ đối xứng với $A$ qua trục hoành.

b) Chứng minh rằng hai đường thẳng $y = x - 2$ và $y = 2 - x$ đối xứng với nhau qua trục hoành.

c) Tìm biểu thức xác định hàm số $y = f(x)$, biết rằng đồ thị của nó là đường thẳng đối xứng với đường thẳng $y = -2x + 3$ qua trục hoành.

**2.20.** a) Cho điểm $A(x_0 \,;\, y_0)$. Hãy xác định toạ độ của điểm $B$, biết rằng $B$ đối xứng với $A$ qua trục tung.

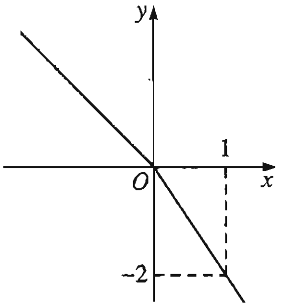
b) Chứng minh rằng hai đường thẳng $y = 3x + 1$ và $y = -3x + 1$ đối xứng với nhau qua trục tung.

c) Tìm biểu thức xác định hàm số $y = f(x)$, biết rằng đồ thị của nó là đường thẳng đối xứng với đường thẳng $y = 0{,}5x - 2$ qua trục tung.

**2.21.** Một tia sáng chiếu xiên một góc $45^{\circ}$ đến điểm $O$ trên bề mặt của một chất lỏng thì bị khúc xạ như hình 2.3. Ta lập hệ toạ độ $Oxy$ như đã thể hiện trên hình vẽ.

a) Hãy tìm hàm số $y = f(x)$ có đồ thị trùng với đường đi của tia sáng nói trên.

b) Lập bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$.



*Hình 2.3*

**2.22.** a) Tìm điểm $A$ sao cho đường thẳng $y = 2mx + 1 - m$ luôn đi qua $A$, dù $m$ lấy bất cứ giá trị nào.

b) Tìm điểm $B$ sao cho đường thẳng $y = mx + 3 - x$ luôn đi qua $B$, dù $m$ lấy bất cứ giá trị nào.

**2.23.** Trong mỗi trường hợp sau, tìm các giá trị của $m$ sao cho

a) Ba đường thẳng $y = 2x$ , $y = -3 - x$ và $y = mx + 5$ phân biệt và đồng quy.

b) Ba đường thẳng $y = -5(x + 1)$ , $y = mx + 3$ và $y = 3x + m$ phân biệt và đồng quy.

## §3. HÀM SỐ BẬC HAI

**2.24.** Cho hàm số $y = \frac{2}{3}x^2$

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị ($P$) của hàm số đã cho.

b) Nếu tịnh tiến ($P$) lên trên 2 đơn vị thì ta được đồ thị của hàm số nào ?

c) Nếu tịnh tiến ($P$) xuống dưới 3 đơn vị thì ta được đồ thị của hàm số nào ?

**2.25.** Cho hàm số $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}x^2$

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị ($P$) của hàm số đã cho.

b) Nếu tịnh tiến ($P$) sang phải 1,5 đơn vị thì ta được đồ thị của hàm số nào ?

c) Nếu tịnh tiến ($P$) sang trái 2 đơn vị thì ta được đồ thị của hàm số nào ?

**2.26.** Cho hàm số $y = 2x^2$ có đồ thị là parabol ($P$). Phải tịnh tiến ($P$) như thế nào để được đồ thị của hàm số

a) $y = 2x^2 + 7$ ;

b) $y = 2x^2 - 5$ ;

c) $y = 2(x + 3)^2$ ;

d) $y = 2(x - 4)^2$ ;

e) $y = 2(x - 2)^2 + 5$ ;

f) $y = 2x^2 - 6x + 1$ ?

**2.27.** Không vẽ đồ thị, tìm toạ độ đỉnh, phương trình trục đối xứng của mỗi parabol sau đây. Tìm giá trị nhỏ nhất hay lớn nhất của mỗi hàm số tương ứng.

a) $y = 2(x + 3)^2 - 5$ ;

b) $y = -(2x - 1)^2 + 4$ ;

c) $y = -\sqrt{2}x^2 + 4x$

**2.28.** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của các hàm số sau :

a) $y = x^2 + x + 1$ ;

b) $y = -2x^2 + x - 2$ ;

c) $y = -x^2 + 2x - 1$ ;

d) $y = \frac{1}{2}x^2 - x + 2$.

**2.29.** Cho hàm số $y = -x^2 + 4x - 3$.

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số đã cho.

b) Dựa vào đồ thị, hãy nêu các khoảng trên đó hàm số chỉ nhận giá trị dương.

c) Dựa vào đồ thị, hãy nêu các khoảng trên đó hàm số chỉ nhận giá trị âm.

**2.30.** Cũng yêu cầu như bài 2.29 đối với các hàm số sau :

a) $y = x^2 - x + \frac{3}{4}$ ;

b) $y = -2x^2 + 3x - \frac{9}{8}$ ;

c) $y = 0,5x^2 - 3x$.

**2.31.** Vẽ đồ thị của mỗi hàm số sau rồi lập bảng biến thiên của nó :

a) $y = \left|\frac{1}{2}x^2 + 2x - 6\right|$ ; b) $y = |-0,5x^2 + 3x - 2,5|$.

**2.32.** Vẽ đồ thị của mỗi hàm số sau rồi lập bảng biến thiên của nó :

a) $f(x) = \begin{cases} -2x + 1 & \text{nếu } x \geq 0 \\ x^2 + 4x + 1 & \text{nếu } x < 0 ; \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2 & \text{nếu } x < 1 \\ 2x^2 - 2x - 3 & \text{nếu } x \geq 1. \end{cases}$

**2.33.** Vẽ đồ thị của hàm số $y = -x^2 + 5x + 6$. Hãy sử dụng đồ thị để biện luận theo tham số $m$ số điểm chung của parabol $y = -x^2 + 5x + 6$ và đường thẳng $y = m$.

**2.34.** Một parabol có đỉnh là điểm $I(-2 ; -2)$ và đi qua gốc toạ độ.

a) Hãy cho biết phương trình trục đối xứng của parabol, biết rằng nó song song với trục tung.

b) Tìm điểm đối xứng với gốc toạ độ qua trục đối xứng trong câu a).

c) Tìm hàm số có đồ thị là parabol đã cho.

**2.35.** a) Kí hiệu $(P)$ là parabol $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$. Chứng minh rằng nếu một đường thẳng song song với trục hoành, cắt $(P)$ tại hai điểm phân biệt $A$ và $B$ thì trung điểm $C$ của đoạn thẳng $AB$ thuộc trục đối xứng của parabol $(P)$.

b) Một đường thẳng song song với trục hoành cắt đồ thị $(P)$ của một hàm số bậc hai tại hai điểm $M(-3 ; 3)$ và $N(1 ; 3)$. Hãy cho biết phương trình trục đối xứng của parabol $(P)$.

**2.36.** Hàm số bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ có giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{3}{4}$ khi $x = \frac{1}{2}$ và nhận giá trị bằng 1 khi $x = 1$.

a) Xác định các hệ số $a$, $b$ và $c$. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị $(P)$ của hàm số nhận được.

b) Xét đường thẳng $y = mx$, kí hiệu bởi $(d)$. Khi $(d)$ cắt $(P)$ tại hai điểm $A$ và $B$ phân biệt, hãy xác định toạ độ trung điểm của đoạn thẳng $AB$.

## BÀI TẬP ÔN TẬP CHƯƠNG II

**2.37.** Chứng minh rằng $y = 0$ là hàm số duy nhất xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị nhận trục hoành làm trục đối xứng.

*Hướng dẫn.* Từ định nghĩa hàm số ta có nhận xét rằng mỗi đường thẳng song song với trục tung thì cắt đồ thị của hàm số tại không quá một điểm.

**2.38.** Giả sử $y = f(x)$ là hàm số xác định trên tập đối xứng $S$ (nghĩa là nếu $x \in S$ thì $-x \in S$). Chứng minh rằng :

a) Hàm số $F(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)]$ là hàm số chẵn xác định trên $S$.

b) Hàm số $G(x) = \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)]$ là hàm số lẻ xác định trên $S$.

**2.39.** Gọi $A$ và $B$ là hai điểm thuộc đồ thị của hàm số $f(x) = (m - 1)x + 2$ và có hoành độ lần lượt là $-1$ và $3$.

a) Xác định toạ độ của hai điểm $A$ và $B$.

b) Với điều kiện nào của $m$ thì điểm $A$ nằm ở phía trên trục hoành ?

c) Với điều kiện nào của $m$ thì điểm $B$ nằm ở phía trên trục hoành ?

d) Với điều kiện nào của $m$ thì hai điểm $A$ và $B$ cùng nằm ở phía trên trục hoành ? Từ đó hãy trả lời câu hỏi : Với điều kiện nào của $m$ thì $f(x) > 0$ với mọi $x$ thuộc đoạn $[-1 ; 3]$ ?

**2.40.** Cho hàm số $y = -3x^2$ có đồ thị là parabol $(P)$.

a) Nếu tịnh tiến $(P)$ sang phải 1 đơn vị rồi tịnh tiến parabol vừa nhận được xuống dưới 3 đơn vị thì ta được đồ thị của hàm số nào ?

b) Nếu tịnh tiến $(P)$ sang trái 2 đơn vị rồi tịnh tiến parabol vừa nhận được lên trên 2 đơn vị thì ta được đồ thị của hàm số nào ?

**2.41.** Tìm hàm số bậc hai có đồ thị là parabol $(P)$, biết rằng đường thẳng $y = -2{,}5$ có một điểm chung duy nhất với $(P)$ và đường thẳng $y = 2$ cắt $(P)$ tại hai điểm có hoành độ là $-1$ và $5$. Vẽ parabol $(P)$ cùng các đường thẳng $y = -2{,}5$ và $y = 2$ trên cùng một mặt phẳng toạ độ.

## GIỚI THIỆU MỘT SỐ CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN

*Trong các bài từ 2.42 đến 2.49, hãy chọn phương án trả lời đúng trong các phương án đã cho.*

**2.42.** Tìm điểm thuộc đồ thị của hàm số $y = \frac{1}{3}x - 2$ trong các điểm có toạ độ là

(A) $(15\,;\,-7)$ ; (B) $(66\,;\,20)$ ;

(C) $(\sqrt{2}-1\,;\,\sqrt{3})$ ; (D) $(3\,;\,1)$.

**2.43.** Hàm số có đồ thị trùng với đường thẳng $y = x + 1$ là hàm số

(A) $y = \left(\sqrt{x+1}\right)^2$ ; (B) $y = \dfrac{(x+1)^2}{x+1}$ ;

(C) $y = x(x+1) - x^2 + 1$ ; (D) $y = \dfrac{x(x+1)}{x}$

**2.44.** Đường thẳng song song với đường thẳng $y = \sqrt{2}x$ là

(A) $y = 1 - \sqrt{2}x$ ; (B) $y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}x - 3$ ;

(C) $y + \sqrt{2}x = 2$ ; (D) $y - \dfrac{2}{\sqrt{2}}x = 5$.

**2.45.** Muốn có parabol $y = 2(x+3)^2$, ta tịnh tiến parabol $y = 2x^2$

(A) Sang trái 3 đơn vị ; (B) Sang phải 3 đơn vị ;

(C) Lên trên 3 đơn vị ; (D) Xuống dưới 3 đơn vị.

**2.46.** Muốn có parabol $y = 2(x+3)^2 - 1$, ta tịnh tiến parabol $y = 2x^2$

(A) Sang trái 3 đơn vị rồi sang phải 1 đơn vị ;

(B) Sang phải 3 đơn vị rồi xuống dưới 1 đơn vị ;

(C) Lên trên 1 đơn vị rồi sang phải 3 đơn vị ;

(D) Xuống dưới 1 đơn vị rồi sang trái 3 đơn vị.

**2.47.** Trục đối xứng của parabol $y = -2x^2 + 5x + 3$ là đường thẳng

(A) $x = \frac{5}{2}$ ;　　(B) $x = -\frac{5}{2}$

(C) $x = \frac{5}{4}$ ;　　(D) $x = -\frac{5}{4}$.

**2.48.** Hàm số $y = 2x^2 + 4x - 1$

(A) Đồng biến trên khoảng $(-\infty ; -2)$ và nghịch biến trên khoảng $(-2 ; +\infty)$ ;

(B) Nghịch biến trên khoảng $(-\infty ; -2)$ và đồng biến trên khoảng $(-2 ; +\infty)$ ;

(C) Đồng biến trên khoảng $(-\infty ; -1)$ và nghịch biến trên khoảng $(-1 ; +\infty)$ ;

(D) Nghịch biến trên khoảng $(-\infty ; -1)$ và đồng biến trên khoảng $(-1 ; +\infty)$.

**2.49.** Hàm số $y = -x^2 - 3x + 5$ có

(A) Giá trị lớn nhất khi $x = \frac{3}{2}$ ;　　(B) Giá trị lớn nhất khi $x = -\frac{3}{2}$

(C) Giá trị nhỏ nhất khi $x = \frac{3}{2}$ ;　　(D) Giá trị nhỏ nhất khi $x = -\frac{3}{2}$

*Trong mỗi bài từ bài 2.50 đến bài 2.52, hãy ghép mỗi thành phần của cột trái với một thành phần thích hợp ở cột phải để được khẳng định đúng.*

**2.50.**

| | |
|---|---|
| a) Điểm $(2 ; 2)$ là đỉnh của parabol<br>b) Điểm $\left(-\frac{1}{2} ; \frac{1}{2}\right)$ là đỉnh của parabol | 1) $y = 2x^2 + 2x + 1$.<br>2) $y = x^2 - x + 1$.<br>3) $y = -0{,}25x^2 + x + 1$. |

**2.51.** Xét parabol $(P) : y = ax^2 + bx + c$

| | |
|---|---|
| a) Chắc chắn $(P)$ có đỉnh nằm ở phía dưới trục hoành<br>b) Chắc chắn $(P)$ có đỉnh nằm ở phía trên trục hoành | 1) nếu $a < 0$ và $c < 0$<br>2) nếu $a > 0$ và $c < 0$<br>3) nếu $a < 0$ và $c > 0$<br>4) nếu $a > 0$ và $c > 0$ |

**2.52.** Xét parabol $(P): y = ax^2 + bx + c$ với $a < 0$, $\Delta = b^2 - 4ac$.

| | |
|---|---|
| a) Chắc chắn $(P)$ cắt trục hoành tại hai điểm có hoành độ dương | 1) nếu $\Delta > 0$, $b < 0$ và $c < 0$ |
| | 2) nếu $\Delta > 0$, $b > 0$ và $c > 0$ |
| b) Chắc chắn $(P)$ cắt trục hoành tại hai điểm có hoành độ âm | 3) nếu $\Delta > 0$, $b < 0$ và $c > 0$ |
| | 4) nếu $\Delta > 0$, $b > 0$ và $c < 0$ |

## C. ĐÁP SỐ – HƯỚNG DẪN – LỜI GIẢI

**2.1.** $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, xác định trên đoạn $[-r\,;\,r]$.

*Chú ý.* Hàm số $y = -\sqrt{r^2 - x^2}$ có đồ thị là nửa đường tròn gồm các điểm thuộc đường tròn đang xét và có tung độ không dương (cũng có tập xác định là $[-r\,;\,r]$).

**2.2.** a) $\mathbb{R} \setminus \{-1\,;\,1\}$.

b) $(-\frac{1}{2}\,;\,+\infty) \setminus \{1\}$.

c) $(-4\,;\,+\infty) \setminus \{2\}$.

**2.3.** a) $[-1\,;\,+\infty)$.

b) $f(0) = -1$ ; $f(2) = \frac{2}{3}$ ; $f(-1) = 0$ ; $f(-3)$ không xác định.

**2.4.** a) $[1\,;\,+\infty)$.

b) $f(4) = 16 + \sqrt{3} \approx 17,73$ ; $f(\sqrt{2}) \approx 2,64$ ; $f(\pi) \approx 11,33$.

**2.5.**

| $x$ | $-2$ | | $0$ | | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y = \sqrt{4 - x^2}$ | $0$ | ↗ | $2$ | ↘ | $0$ |

**2.6.**

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $+\infty$ | ↘ | | ↗ | $2,4$ | ↘ | | ↗ | $+\infty$ |
| | | | $1,6$ | | | | $-4,4$ | | |

Hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng $-4,4$ khi $x = 2$, nhưng không có giá trị lớn nhất.

**2.7.** a) $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = x_2 + x_1 + 4.$

Trên khoảng $(-\infty ; -2)$, ta có $x_2 + x_1 + 4 < 0$ nên hàm số nghịch biến.

Trên khoảng $(-2 ; +\infty)$, ta có $x_2 + x_1 + 4 > 0$ nên hàm số đồng biến.

b) $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = -x_2 - x_1 + 2.$

Trên khoảng $(-\infty ; 1)$, ta có $-x_2 - x_1 + 2 > 0$ nên hàm số đồng biến.

Trên khoảng $(1 ; +\infty)$, ta có $-x_2 - x_1 + 2 < 0$ nên hàm số nghịch biến.

c) Với hai số phân biệt $x_1$ và $x_2$ thuộc tập xác định của hàm số, ta có :

$$f(x_2) - f(x_1) = \frac{x_2}{x_2 + 1} - \frac{x_1}{x_1 + 1} = \frac{x_2 - x_1}{(x_1 + 1)(x_2 + 1)},$$

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{1}{(x_1 + 1)(x_2 + 1)}.$$

Do đó :

– Nếu $x_1 < -1$ và $x_2 < -1$ thì $(x_1 + 1)(x_2 + 1) > 0$ và $\dfrac{1}{(x_1 + 1)(x_2 + 1)} > 0$, suy ra hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty ; -1)$.

– Nếu $x_1 > -1$ và $x_2 > -1$ thì $(x_1 + 1)(x_2 + 1) > 0$ và $\dfrac{1}{(x_1 + 1)(x_2 + 1)} > 0$, suy ra hàm số cũng đồng biến trên khoảng $(-1 ; +\infty)$.

d) $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\dfrac{7}{(-x_2+2)(-x_1+2)}$. Từ đó suy ra hàm số đã cho đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty\ ;\ 2)$ và $(2\ ;\ +\infty)$.

**2.8.** Dễ thấy hàm số $y = 0$ là hàm số xác định trên $\mathbb{R}$, vừa là hàm số chẵn, vừa là hàm số lẻ. Giả sử hàm số $y = f(x)$ là một hàm số bất kì có tính chất như thế. Khi đó với mọi $x$ thuộc $\mathbb{R}$, ta có :

$$f(-x) = f(x) \text{ (vì } f \text{ là hàm số chẵn) ;}$$
$$f(-x) = -f(x) \text{ (vì } f \text{ là hàm số lẻ).}$$

Từ đó suy ra với mọi $x$ thuộc $\mathbb{R}$, xảy ra $f(x) = -f(x)$, nghĩa là $f(x) = 0$. Vậy $y = 0$ là hàm số duy nhất xác định trên $\mathbb{R}$, vừa là hàm số chẵn, vừa là hàm số lẻ.

**2.9.** a) Dễ dàng suy ra từ giả thiết và định nghĩa hàm số chẵn.

b) Với $x$ tuỳ ý thuộc $\mathbb{R}$, ta có : $f(-x) = -f(x)$ và $g(-x) = -g(x)$ (vì $f$ và $g$ là những hàm số lẻ) ; do đó

$$S(-x) = f(-x) + g(-x) = -f(x) - g(x) = -[f(x) + g(x)] = -S(x),$$
$$P(-x) = f(-x)g(-x) = [-f(x)][-g(x)] = f(x)g(x) = P(x).$$

Vậy $y = S(x)$ là hàm số lẻ và $y = P(x)$ là hàm số chẵn.

c) Với $x$ tuỳ ý thuộc $\mathbb{R}$, ta có : $f(-x) = f(x)$ và $g(-x) = -g(x)$ (vì $f$ là hàm số chẵn và $g$ là hàm số lẻ) ; do đó

$$P(-x) = f(-x)g(-x) = f(x)[-g(x)] = -f(x)g(x) = -P(x).$$

Vậy $y = P(x)$ là hàm số lẻ.

**2.10.** a) Hàm số chẵn (tổng của ba hàm số chẵn).

b) Hàm số lẻ (tổng của hai hàm số lẻ).

c) Hàm số lẻ (tích của hàm số lẻ $y = x$ và hàm số chẵn $y = |x|$).

d) Tập xác định của hàm số $f(x) = \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}$ là đoạn $[-1\ ;\ 1]$. Với mọi $x$ thuộc đoạn $[-1\ ;\ 1]$, ta có :

$$f(-x) = \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x} = f(x).$$

Vậy $y = f(x)$ là hàm số chẵn.

e) Tập xác định của hàm số $g(x) = \sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}$ là đoạn $[-1 ; 1]$. Với mọi $x$ thuộc đoạn $[-1 ; 1]$, ta có :

$$g(-x) = \sqrt{1-x} - \sqrt{1+x} = -g(x).$$

Vậy $y = g(x)$ là hàm số lẻ.

**2.11.** a) Khi tịnh tiến lên trên 5 đơn vị, ta được :

$A(-1 ; 3) \mapsto A_1(-1 ; 8)$ ; $B(2 ; -5) \mapsto B_1(2 ; 0)$ ; $C(a ; b) \mapsto C_1(a ; b+5)$.

b) Khi tịnh tiến xuống dưới 3 đơn vị, ta được :

$A(-1 ; 3) \mapsto A_2(-1 ; 0)$ ; $B(2 ; -5) \mapsto B_2(2 ; -8)$ ; $C(a ; b) \mapsto C_2(a ; b-3)$.

c) Khi tịnh tiến sang phải 1 đơn vị, ta được :

$A(-1 ; 3) \mapsto A_3(0 ; 3)$ ; $B(2 ; -5) \mapsto B_3(3 ; -5)$ ; $C(a ; b) \mapsto C_3(a+1 ; b)$.

d) Khi tịnh tiến sang trái 4 đơn vị, ta được :

$A(-1 ; 3) \mapsto A_4(-5 ; 3)$ ; $B(2 ; -5) \mapsto B_4(-2 ; -5)$ ; $C(a ; b) \mapsto C_4(a-4 ; b)$.

**2.12.** a) $(d_1)$ là đồ thị của hàm số $y = (4x - 3) + 4$ hay $y = 4x + 1$.

b) $(d_2)$ là đồ thị của hàm số $y = 4(x + 1) - 3$ hay $y = 4x + 1$.

c) Đường thẳng $y = 4x + 1$ có thể có được bằng cách tịnh tiến đường thẳng $y = 4x - 3$ theo hai cách như trong a) và b).

**2.13.** a) Tịnh tiến $(H)$ xuống dưới 3 đơn vị, ta được đồ thị hàm số $y = \dfrac{-2}{x} - 3$, hay $y = \dfrac{-3x - 2}{x}$

b) Tịnh tiến $(H)$ sang phải 2 đơn vị, ta được đồ thị hàm số $y = \dfrac{-2}{x - 2}$.

c) Tịnh tiến $(H)$ lên trên 1 đơn vị rồi sang trái 4 đơn vị, ta được đồ thị hàm số $y = \dfrac{-2}{x + 4} + 1$, hay $y = \dfrac{x + 2}{x + 4}$

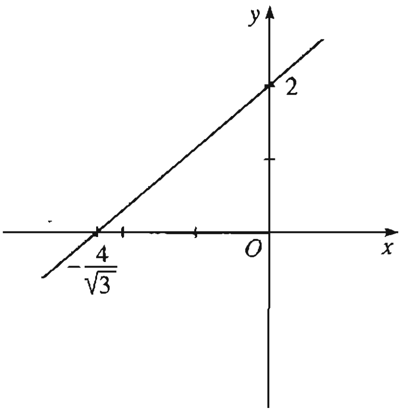
**2.14.** a), b) Học sinh tự giải.

c) Đồ thị hình 2.4.

Giao điểm với trục tung : (0 ; 2).

Giao điểm với trục hoành :

$(-\frac{4}{\sqrt{3}}\,;\,0)$.



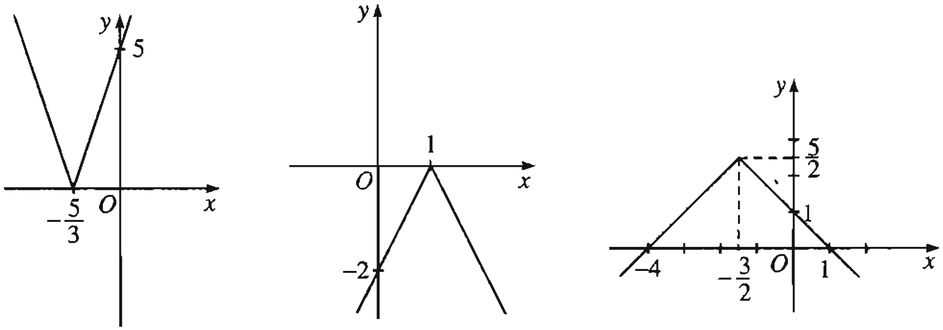
*Hình 2.4*

**2.15.** a) $k = 0$. b) $k = 1$.

c) $k = 2 + \sqrt{2}$

**2.16.** Các cặp đường thẳng song song là : a) và e) ; b) và d) ; c) và *f*).

**2.17.** a) Đồ thị hình 2.5.a).



a) b) c)

*Hình 2.5*

b) Hàm số có thể viết dạng $y = \begin{cases} -2x + 2 & \text{khi } x \geq 1 \\ 2x - 2 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$ Đồ thị hình 2.5.b).

c) Hàm số có thể viết dạng $y = \begin{cases} -x + 1 & \text{khi } x \geq -\frac{3}{2} \\ x + 4 & \text{khi } x < -\frac{3}{2} \end{cases}$. Đồ thị hình 2.5.c).

(Học sinh tự lập bảng biến thiên).

**2.18.** a) Trên đường thẳng $y = 2x + 5$, điểm có hoành độ bằng $-2$ là $A(-2\,;\,1)$. Trên đường thẳng $y = -3x + 4$, điểm có tung độ bằng $-2$ là $B(2\,;\,-2)$. Vậy đường thẳng cần tìm đi qua hai điểm $A$ và $B$. Từ đó, a và b phải thoả mãn hệ

$$\begin{cases} -2a + b = 1 \\ 2a + b = -2. \end{cases}$$

Suy ra $a = -\dfrac{3}{4}$ , $b = -\dfrac{1}{2}$ ·

b) Giao điểm $M$ của hai đường thẳng $y = -\dfrac{1}{2}x + 1$ và $y = 3x + 5$ có toạ độ là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} y = -\dfrac{1}{2}x + 1 \\ y = 3x + 5. \end{cases}$

Hệ này có nghiệm $(x\ ;\ y) = \left(-\dfrac{8}{7}; \dfrac{11}{7}\right)$. Vậy đường thẳng cần tìm song song với đường thẳng $y = \dfrac{1}{2}x$ và đi qua điểm $M\left(-\dfrac{8}{7}; \dfrac{11}{7}\right)$. Từ đó suy ra $a = \dfrac{1}{2}$ và $b = \dfrac{15}{7}$·

**2.19.** a) $B(x_0\ ; -y_0)$.

b) Muốn chứng minh hai đường thẳng $(d_1)$ và $(d_2)$ đối xứng với nhau qua trục hoành, ta chứng minh rằng nếu $A(x_0\ ;\ y_0)$ là một điểm tuỳ ý thuộc $(d_1)$ thì điểm đối xứng với $A$ qua trục hoành, tức là điểm $B(x_0\ ; -y_0)$ thuộc $(d_2)$ và ngược lại. Thật vậy, gọi $(d_1)$ là đường thẳng $y = x - 2$; $(d_2)$ là đường thẳng $y = 2 - x$, ta có

$A(x_0\ ;\ y_0) \in (d_1) \Leftrightarrow y_0 = x_0 - 2 \Leftrightarrow -y_0 = 2 - x_0 \Leftrightarrow B(x_0\ ; -y_0) \in (d_2)$.

Từ đó suy ra đpcm.

c) Tương tự như câu trên, ta dễ dàng chứng minh được rằng đồ thị của hai hàm số $y = f(x)$ và $y = -f(x)$ đối xứng với nhau qua trục hoành.

Do đó, đường thẳng đối xứng với đường thẳng $y = -2x + 3$ qua trục hoành là đồ thị của hàm số $y = -(-2x + 3)$, tức là hàm số $y = 2x - 3$.

**2.20.** a) $B(-x_0\ ;\ y_0)$.

b) Chứng minh tương tự bài 2.19.b).

c) $y = -0{,}5x - 2$. *Gợi ý*. Trước hết chứng minh rằng đồ thị của hai hàm số $y = f(x)$ và $y = f(-x)$ đối xứng với nhau qua trục tung.

**2.21.** a) $f(x)=\begin{cases}-x & \text{khi } x \le 0\\ -2x & \text{khi } x > 0.\end{cases}$

b) Học sinh tự lập bảng biến thiên.

**2.22.** a) Giả sử điểm $A$ cần tìm có toạ độ $(x_0 ; y_0)$. Khi đó, vì $A$ thuộc đường thẳng $y = 2mx + 1 - m$ với mọi $m$ nên đẳng thức

$$y_0 = 2m\,x_0 + 1 - m,\ \text{hay}\ (2\,x_0 - 1)m + 1 - y_0 = 0$$

xảy ra với mọi $m$. Điều đó chỉ có thể xảy ra khi ta có đồng thời $2x_0 - 1 = 0$ và $1 - y_0 = 0$, nghĩa là $x_0 = \frac{1}{2}$ và $y_0 = 1$. Vậy toạ độ của $A$ là $(\frac{1}{2} ; 1)$.

Ngược lại, dễ thấy giá trị của hàm số $y = 2mx + 1 - m$ tại $x = \frac{1}{2}$ luôn bằng 1 với mọi $m$, chứng tỏ đồ thị của nó luôn đi qua điểm $A(\frac{1}{2} ; 1)$ với mọi $m$.

b) $B(0 ; -3)$. *Gợi ý.* Cách giải tương tự câu a).

**2.23.** a) Hai đường thẳng $y = 2x$ và $y = -3 - x$ cắt nhau tại $M(-1 ; -2)$. Đường thẳng thứ ba $y = mx + 5$ cũng đi qua điểm $M$ khi và chỉ khi $-2 = m(-1) + 5$, tức là $m = 7$. Thử lại ta thấy $m$ thoả mãn điều kiện của đầu bài.

b) Hai đường thẳng $y = -5(x + 1)$ và $y = 3x + m$ cắt nhau tại

$$N\left(-\frac{m+5}{8} ; \frac{5m-15}{8}\right).$$

Đường thẳng $y = mx + 3$ cũng đi qua $N$ khi và chỉ khi

$$\frac{5m-15}{8} = m\left(-\frac{m+5}{8}\right) + 3.$$

Giải phương trình trên đối với ẩn $m$, ta được $m = -13$ và $m = 3$.

– Với $m = -13$, ba đường thẳng $y = -5(x + 1)$, $y = -13x + 3$ và $y = 3x - 13$ đồng quy tại điểm $N_1(1 ; -10)$.

– Với $m = 3$, hai đường thẳng $y = mx + 3$ và $y = 3x + m$ trùng nhau và trùng với đường thẳng $y = 3x + 3$. Do đó trường hợp này bị loại.

*Kết luận.* $m = -13$.

**2.24.** a) Học sinh tự giải. b) $y = \frac{2}{3}x^2 + 2$. c) $y = \frac{2}{3}x^2 - 3$.

**2.25.** a) Học sinh tự giải. b) $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}(x - 1,5)^2$

c) $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}(x + 2)^2$

**2.26.** a) Tịnh tiến $(P)$ lên trên 7 đơn vị.

b) Tịnh tiến $(P)$ xuống dưới 5 đơn vị.

c) Tịnh tiến sang trái 3 đơn vị.

d) Tịnh tiến sang phải 4 đơn vị.

e) Tịnh tiến sang phải 2 đơn vị rồi tịnh tiến tiếp lên trên 5 đơn vị.

*f*) Tịnh tiến sang phải 1,5 đơn vị rồi tịnh tiến tiếp xuống dưới 3,5 đơn vị.

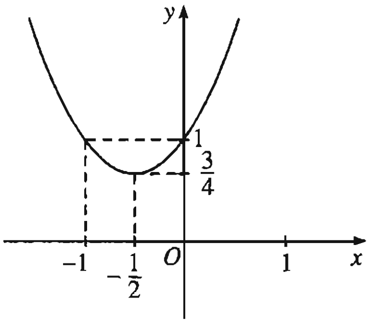
**2.27.** Kết quả được nêu trong bảng sau

| Parabol | Đỉnh | Trục đối xứng | Giá trị nhỏ nhất | Giá trị lớn nhất |
|---|---|---|---|---|
| $y = 2(x + 3)^2 - 5$ | $(-3 ; -5)$ | $x = -3$ | $-5$ | |
| $y = -(2x - 1)^2 + 4 = -4(x - \frac{1}{2})^2 + 4$ | $(\frac{1}{2} ; 4)$ | $x = \frac{1}{2}$ | | 4 |
| $y = -\sqrt{2}x^2 + 4x = -\sqrt{2}(x - \sqrt{2})^2 + 2\sqrt{2}$ | $(\sqrt{2} ; 2\sqrt{2})$ | $x = \sqrt{2}$ | | $2\sqrt{2}$ |

**2.28.** a) Ta có thể viết hàm số $y = x^2 + x + 1$ dưới dạng

$$y = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}.$$

Từ đó suy ra đồ thị của nó là một parabol hướng bề lõm lên trên và có đỉnh tại $\left(-\frac{1}{2} ; \frac{3}{4}\right)$; hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-\infty ; -\frac{1}{2})$, đồng biến trên khoảng $(-\frac{1}{2} ; +\infty)$ và có giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{3}{4}$ khi $x = -\frac{1}{2}$ Học sinh tự lập bảng biến thiên.



*Hình 2.6*

Để vẽ đồ thị của hàm số này, ta lập bảng một vài giá trị của nó như sau

| $x$ | $-2$ | $-1$ | $-\frac{1}{2}$ | $0$ | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $3$ | $1$ | $\frac{3}{4}$ | $1$ | $3$ |

Đồ thị của hàm số có dạng như hình 2.6.

b) Đưa hàm số đã cho về dạng $y = -2\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{15}{8}$ Từ đó suy ra hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty ; \frac{1}{4})$, nghịch biến trên khoảng $(\frac{1}{4} ; +\infty)$ và có giá trị lớn nhất bằng $-\frac{15}{8}$ khi $x = \frac{1}{4}$. Học sinh tự lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị của nó.

c) Học sinh tự giải.

d) Học sinh tự giải.

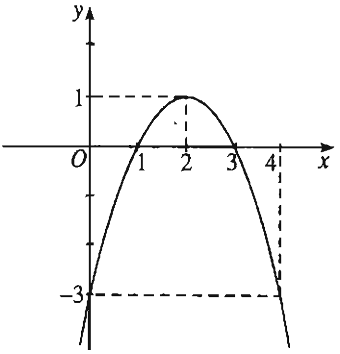
**2.29.** a) Hàm số $y = -x^2 + 4x - 3$ có thể viết được dưới dạng

$$y = -(x - 2)^2 + 1.$$

Từ đó suy ra hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty ; 2)$, nghịch biến trên khoảng $(2 ; +\infty)$. Bảng biến thiên :

| $x$ | $-\infty$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y = -x^2 + 4x - 3$ | | | $1$ | | |
| | $-\infty$ | $\nearrow$ | | $\searrow$ | $-\infty$ |

Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 1 khi $x = 2$. Đồ thị của nó là một parabol đi qua các điểm $(0 ; -3)$, $(1 ; 0)$, $(2 ; 1)$, $(3 ; 0)$, $(4 ; -3)$ (h.2.7).



*Hình 2.7*

Từ đồ thị ta thấy :

b) Hàm số chỉ nhận giá trị dương nếu $x \in (1 ; 3)$.

c) Hàm số chỉ nhận giá trị âm nếu

$$x \in (-\infty ; 1) \cup (3 ; +\infty).$$

**2.30.** a) Học sinh tự khảo sát sự biến thiên của hàm số.

Hàm số có đồ thị như hình 2.8a.

Hàm số nhận giá trị dương với mọi $x \in \mathbb{R}$.

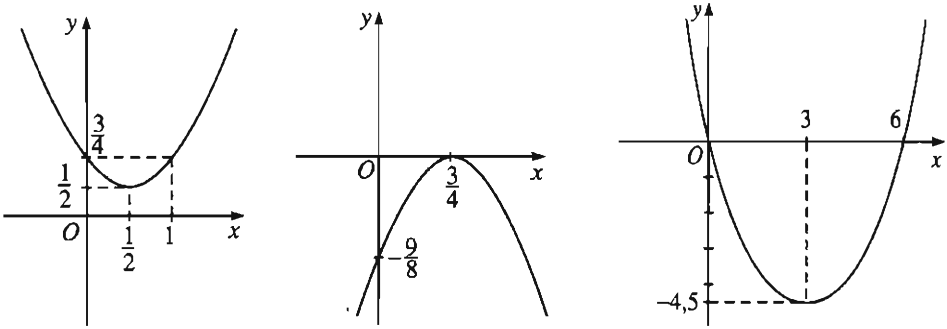
b) Học sinh tự khảo sát sự biến thiên của hàm số.

Hàm số có đồ thị như hình 2.8b.

Hàm số nhận giá trị âm với mọi $x \neq \frac{3}{4}$ (khi $x = \frac{3}{4}$, hàm số nhận giá trị bằng 0).

c) Học sinh tự khảo sát sự biến thiên của hàm số.

Hàm số có đồ thị như hình 2.8c.



a) b) c)

*Hình 2.8*

Hàm số nhận giá trị âm nếu $x \in (0\ ;\ 6)$ và nhận giá trị dương nếu $x \in (-\infty\ ;\ 0) \cup (6\ ;\ +\infty)$.

**2.31.** a) $y = \left|\frac{1}{2}x^2 + 2x - 6\right|$.

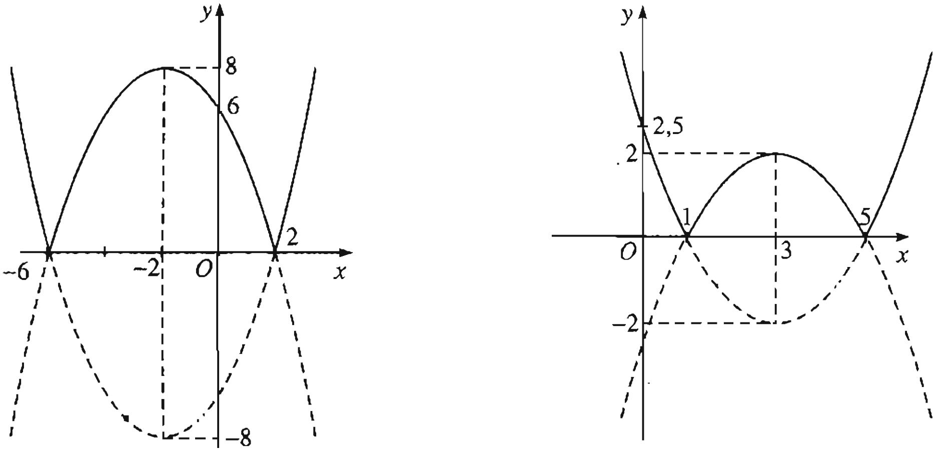
Đồ thị (h. 2.9a).

Bảng biến thiên

| $x$ | $-\infty$ | | $-6$ | | $-2$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $+\infty$ | ↘ | $0$ | ↗ | $8$ | ↘ | $0$ | ↗ | $+\infty$ |

b) $y = |-0{,}5x^2 + 3x - 2{,}5|$

Đồ thị (h. 2.9b).



a) b)

*Hình 2.9*

Bảng biến thiên

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $3$ | | $5$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $+\infty$ | ↘ | $0$ | ↗ | $2$ | ↘ | $0$ | ↗ | $+\infty$ |

**2.32.** a) $y = \begin{cases} -2x + 1 & \text{nếu } x \geq 0 \\ x^2 + 4x + 1 & \text{nếu } x < 0. \end{cases}$

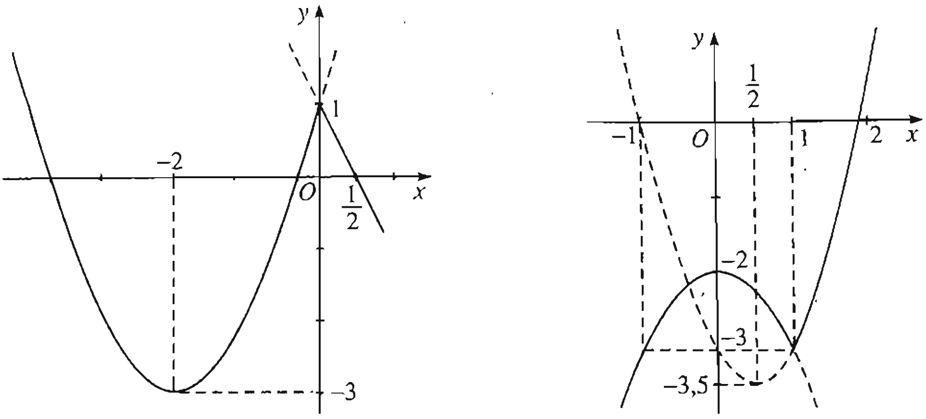
Đồ thị (h. 2.10a).

Học sinh tự lập bảng biến thiên.

b) $y = \begin{cases} -x^2 - 2 & \text{nếu } x < 1 \\ 2x^2 - 2x - 3 & \text{nếu } x \geq 1. \end{cases}$

Đồ thị (h. 2.10b).

Học sinh tự lập bảng biến thiên.



a)

b)

*Hình 2.10*

**2.33.** Học sinh tự vẽ đồ thị.

Do parabol hướng bề lõm xuống dưới và có đỉnh tại điểm $\left(\frac{5}{2}\,;12\frac{1}{4}\right)$ nên :

– Nếu $m > 12\frac{1}{4}$ thì đường thẳng và parabol không có điểm chung.

– Nếu $m = 12\frac{1}{4}$ thì đường thẳng và parabol có một điểm chung.

– Nếu $m < 12\frac{1}{4}$ thì đường thẳng và parabol có hai điểm chung phân biệt.

**2.34.** a) Phương trình trục đối xứng là $x = -2$.

b) Điểm đối xứng với $O(0\,;0)$ qua trục $x = -2$ là điểm $M(-4\,;0)$.

c) Ta phải tìm $a$ $(a \neq 0)$, $b$ và $c$ sao cho hàm số $y = ax^2 + bx + c$ có đồ thị là parabol đỉnh $I(-2\,;-2)$ và đi qua điểm $O$. Từ giả thiết ta có các hệ thức sau :

$$-\frac{b}{2a} = -2\,;\quad -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -2 \text{ và } c = 0.$$

Từ đó tính được $a = \frac{1}{2}$ , $b = 2$, $c = 0$ và hàm số cần tìm là $y = \frac{1}{2}x^2 + 2x$.

**2.35.** a) Ta đã biết trục đối xứng của parabol $y = ax^2 + bx + c$ là đường thẳng $x = -\frac{b}{2a}$.

Giả sử $(d)$ là đường thẳng đã cho (song song với trục hoành). Ta biết rằng $(d)$ là đồ thị của hàm số không đổi $y = m$ với $m$ là một số nào đó. Giả thiết cho $(d)$ cắt $(P)$ tại hai điểm phân biệt $A$ và $B$ có nghĩa là phương trình $ax^2 + bx + c = m$ hay

$$ax^2 + bx + c - m = 0 \qquad (1)$$

có hai nghiệm phân biệt ; hơn nữa, hai nghiệm ấy chính là các hoành độ $x_A$ của điểm $A$ và $x_B$ của điểm $B$. Theo định lí Vi-ét, ta có $x_A + x_B = -\frac{b}{a}$

Do đó trung điểm $C$ của đoạn thẳng $AB$ có hoành độ là $x_C = \frac{x_A + x_B}{2} = -\frac{b}{2a}$

Điều đó chứng tỏ điểm $C$ thuộc đường thẳng $x = -\frac{b}{2a}$, tức là thuộc trục đối xứng của parabol $(P)$.

*Chú ý.* Đường thẳng $(d)$ song song với trục hoành nên vuông góc với trục đối xứng của $(P)$. Do đó, khi $(d)$ cắt $(P)$ tại hai điểm $A$ và $B$ thì hai điểm ấy đối xứng với nhau qua trục đối xứng và trung điểm $C$ của đoạn $AB$ phải thuộc trục đối xứng.

b) Áp dụng kết quả trên, trung điểm $K$ của đoạn $MN$ phải thuộc trục đối xứng của parabol $(P)$. Điểm $K$ có hoành độ là $\frac{-3 + 1}{2} = -1$. Vậy trục đối xứng của parabol $(P)$ có phương trình là $x = -1$.

**2.36.** a) • Vì hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{3}{4}$ khi $x = \frac{1}{2}$ nên $-\frac{b}{2a} = \frac{1}{2}$ và $-\frac{\Delta}{4a} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = \frac{3}{4}$, suy ra $a = -b$ và $-a + 4c = 3$.

Vì hàm số có giá trị bằng 1 khi $x = 1$ nên $f(1) = a + b + c = 1$, suy ra $c = 1$ (do $a = -b$). Do đó $a = 4c - 3 = 1$ và $b = -1$.

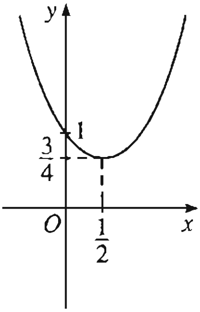
Vậy hàm số cần tìm là $y = x^2 - x + 1$.

- Do hệ số $a = 1 > 0$ và giá trị nhỏ nhất của hàm số đạt được tại $x = \frac{1}{2}$ nên hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty ; \frac{1}{2})$ và đồng biến trên khoảng $(\frac{1}{2} ; +\infty)$.

Bảng biến thiên :

| $x$ | $-\infty$ |  | $\frac{1}{2}$ |  | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y = x^2 - x + 1$ | $+\infty$ | ↘ | $\frac{3}{4}$ | ↗ | $+\infty$ |

Hàm số có đồ thị như hình 2.11.



*Hình 2.11*

b) Đường thẳng $y = mx$ cắt parabol $(P)$ tại hai điểm $A(x_A ; y_A)$ và $B(x_B ; y_B)$ nếu và chỉ nếu phương trình $x^2 - x + 1 = mx$ hay

$$x^2 - (1 + m)x + 1 = 0 \qquad (1)$$

có hai nghiệm phân biệt, tức là biệt thức $\Delta = (1 + m)^2 - 4 = m^2 + 2m - 3$ dương.

Khi đó, hai nghiệm của (1) chính là $x_A$ và $x_B$. Theo định lí Vi-ét, ta có

$$x_A + x_B = 1 + m. \qquad (2)$$

Từ (2) ta suy ra hoành độ trung điểm $C$ của đoạn thẳng $AB$ là

$$x_C = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{1 + m}{2}.$$

Do $C$ là một điểm thuộc đường thẳng $(d)$ nên tung độ $y_C$ của nó thoả mãn

$$y_C = mx_C = \frac{m(1 + m)}{2}.$$

*Kết luận*. Toạ độ trung điểm của đoạn thẳng $AB$ là $C\left(\frac{1 + m}{2} ; \frac{m(1 + m)}{2}\right)$, với điều kiện $m^2 + 2m - 3 > 0$.

**2.37.** Hiển nhiên hàm số $y = 0$ xác định với mọi $x$ và có đồ thị đối xứng qua trục hoành.

Giả sử hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$, có đồ thị $(G)$ nhận trục hoành làm trục đối xứng. Khi đó

$$\forall x \in \mathbb{R} : M(x\,;\,y) \in (G) \Leftrightarrow M'(x\,;\,-y) \in (G).$$

Điều này có nghĩa là

$$\forall x \in \mathbb{R} : y = f(x) \Leftrightarrow -y = f(x).$$

Suy ra $y = 0$ với mọi $x$.

Vậy hàm số $y = 0$ là hàm số duy nhất có đồ thị đối xứng qua trục hoành.

*Chú ý.* Cũng có thể chứng minh rằng $(G)$ trùng với trục hoành. Thật vậy, nếu trái lại thì phải có một điểm $M(x_0\,;\,y_0)$ thuộc $(G)$ và $y_0 \neq 0$. Khi đó, do tính đối xứng qua trục hoành, điểm $M'(x_0\,;\,-y_0)$ cũng thuộc $(G)$. Ta có đường thẳng $MM'$ song song với trục tung, cắt $(G)$ tại hai điểm phân biệt $M$ và $M'$ Đó là điều không thể xảy ra đối với đồ thị của một hàm số.

**2.38.** a) $F(-x) = \frac{1}{2}[f(-x) + f(x)] = F(x)$.

b) $G(-x) = \frac{1}{2}[f(-x) - f(x)] = -\frac{1}{2}[f(x) - f(-x)] = -G(x)$.

**2.39.** a) $A(-1\,;\,-m + 3)$, $B(3\,;\,3m - 1)$.

b) $A$ nằm ở phía trên trục hoành khi và chỉ khi $-m + 3 > 0$, tức là $m < 3$.

c) $B$ nằm ở phía trên trục hoành khi và chỉ khi $3m - 1 > 0$, tức là $m > \frac{1}{3}$.

d) Cả hai điểm $A$ và $B$ đều nằm ở phía trên trục hoành khi và chỉ khi các điều kiện nói trong câu b) và c) đồng thời được thoả mãn, nghĩa là $\frac{1}{3} < m < 3$. Khi đó, toàn bộ đoạn thẳng $AB$ nằm ở phía trên trục hoành. Nói cách khác :

$$(m - 1)x + 2 > 0,\ \forall x \in [-1\,;\,3] \Leftrightarrow \frac{1}{3} < m < 3.$$

**2.40.** a) $y = -3(x - 1)^2 - 3$ ; b) $y = -3(x + 2)^2 + 2$.

**2.41.** Đường thẳng $y = -2{,}5$ song song với trục hoành. Do đường thẳng này có một điểm chung duy nhất với parabol $(P)$ nên điểm chung ấy chính là đỉnh của parabol $(P)$. Từ đó suy ra đỉnh I của parabol $(P)$ có tung độ $y = -2{,}5$.

Đường thẳng $y = 2$ cũng song song với trục hoành. Do đó trung điểm $C$ của đoạn thẳng $AB$ nằm trên trục đối xứng của parabol.

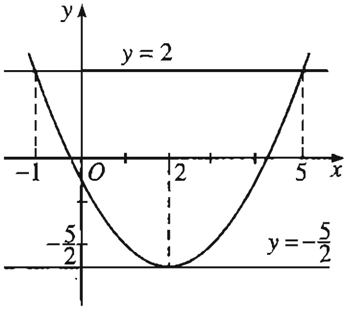
Hoành độ của điểm $C$ là $x = \dfrac{-1+5}{2} = 2$. Vậy trục đối xứng của parabol là đường thẳng $x = 2$, suy ra hoành độ đỉnh I của $(P)$ là $x = 2$.

Toạ độ của $I$ là $(2\ ;\ -2{,}5)$. Từ đó suy ra nếu $(P)$ là đồ thị của hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c$ thì

$f(-1) = a - b + c = 2$, $-\dfrac{b}{2a} = 2$ và

$-\dfrac{\Delta}{4a} = -\dfrac{b^2 - 4ac}{4a} = -2{,}5.$

Từ đó suy ra $a = \dfrac{1}{2}$. $b = -2$ , $c = -\dfrac{1}{2}$ và hàm số cần tìm là $y = \dfrac{1}{2}x^2 - 2x - \dfrac{1}{2}$ Đồ thị của hàm số như trên hình 2.12.



*Hình 2.12*

**2.42.** Phương án (B).

**2.43.** Phương án (C). Chú ý rằng các hàm số còn lại đều có tập xác định khác $\mathbb{R}$.

**2.44.** Phương án (D).

**2.45.** Phương án (A). Chỉ cần chú ý rằng cần phải tịnh tiến sang trái.

**2.46.** Phương án (D). *Chú ý*. Tránh nhầm lẫn về phương và hướng tịnh tiến.

**2.47.** Phương án (C). *Chú ý*. Tránh các nhầm lẫn về dấu và nhầm lẫn giữa $\dfrac{b}{2a}$ và $\dfrac{b}{a}$.

**2.48.** Phương án (D).

**2.49.** Phương án (B).

**2.50.** (a) ↔ (3) ; (b) ↔ (1).

**2.51.** (a) ↔ (2) ; (b) ↔ (3).

**2.52.** (a) ↔ (4) ; (b) ↔ (1).

# *Chương III*

# PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT VÀ BẬC HAI

## A. NHỮNG KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Các kiến thức được nêu sau đây có bổ sung một vài kết quả *dễ nhận thấy* và được *sử dụng nhiều trong thực hành giải toán.*

### 1. Các phép biến đổi tương đương của phương trình

1) Thực hiện các phép biến đổi đồng nhất trong từng vế nhưng không làm thay đổi tập xác định của phương trình.

2) Thêm vào hai vế của phương trình cùng một biểu thức xác định với mọi giá trị của ẩn thuộc tập xác định của phương trình (trường hợp hay dùng là *quy tắc chuyển vế*).

3) Nhân hai vế của phương trình với cùng một biểu thức xác định và khác 0 với mọi giá trị của ẩn thuộc tập xác định của phương trình (chú ý rằng *chia* cho một số *tức là nhân* với nghịch đảo của số đó).

4) Bình phương hai vế của một phương trình có hai vế luôn cùng dấu khi ẩn lấy mọi giá trị thuộc tập xác định của phương trình.

### 2. Phép biến đổi cho phương trình hệ quả

Bình phương hai vế của một phương trình.

### 3. Giải và biện luận phương trình dạng $ax + b = 0$

- $a \neq 0$ : phương trình có một nghiệm duy nhất $x = -\dfrac{b}{a}$
- $a = 0$ và $b \neq 0$ : phương trình vô nghiệm.
- $a = b = 0$ : phương trình nghiệm đúng với mọi $x$.

## 4. Giải và biện luận phương trình bậc hai một ẩn

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad (1)$$

với biệt thức $\Delta = b^2 - 4ac$ hay biệt thức thu gọn $\Delta' = b'^2 - ac$ (với $b = 2b'$).

- $\Delta < 0$ ($\Delta' < 0$) : (1) vô nghiệm.
- $\Delta = 0$ ($\Delta' = 0$) : (1) có một nghiệm kép $x = -\dfrac{b}{2a}\left(x = -\dfrac{b'}{a}\right)$.
- $\Delta > 0$ ($\Delta' > 0$) : (1) có hai nghiệm phân biệt $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}\left(x = \dfrac{-b' \pm \sqrt{\Delta'}}{a}\right)$.

## 5. Định lí Vi-ét (thuận và đảo) :

Hai số $x_1$ và $x_2$ là hai nghiệm của phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ *khi và chỉ khi* chúng thoả mãn hai hệ thức Vi-ét sau :

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \ ; \ x_1x_2 = \frac{c}{a}.$$

Định lí Vi-ét có thể được ứng dụng để :

– Nhẩm nghiệm của phương trình bậc hai.

– Tìm hai số biết tổng và tích của chúng : Nếu hai số có tổng bằng $S$ và tích bằng $P$ thì hai số đó là hai nghiệm của phương trình

$$x^2 - Sx + P = 0.$$

(Tất nhiên, điều kiện tồn tại của hai số nói trên là $S^2 - 4P \geq 0$.)

– Phân tích một tam thức bậc hai thành nhân tử : Cho tam thức bậc hai

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

Nếu phương trình bậc hai $f(x) = 0$ có hai nghiệm (có thể trùng nhau) $x_1$ và $x_2$ thì tam thức bậc hai $f(x)$ có thể phân tích được thành nhân tử như sau :

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

– Tính giá trị các biểu thức đối xứng của hai nghiệm của phương trình bậc hai :

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \ ; P = x_1x_2 = \frac{c}{a} \ ;$$

$$x_1^2 + x_2^2 = S^2 - 2P \ ; \ x_1^3 + x_2^3 = S^3 - 3PS.$$

– Xét dấu các nghiệm của phương trình bậc hai :

Phương trình có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow P < 0$.

Phương trình có hai nghiệm dương $\Leftrightarrow \Delta \geq 0$, $P > 0$ và $S > 0$.

Phương trình có hai nghiệm âm $\Leftrightarrow \Delta \geq 0$, $P > 0$ và $S < 0$.

## 6. Giải và biện luận hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases} \quad (a^2 + b^2 \neq 0 \text{ và } a'^2 + b'^2 \neq 0). \qquad (2)$$

$$\mathrm{D} = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b\ ;$$

$$\mathrm{D}_x = \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix} = cb' - c'b\ ;$$

$$\mathrm{D}_y = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} = ac' - a'c.$$

- $\mathrm{D} \neq 0$ : (2) có một nghiệm duy nhất $(x\ ;\ y)$, trong đó $x = \dfrac{\mathrm{D}_x}{\mathrm{D}}$, $y = \dfrac{\mathrm{D}_y}{\mathrm{D}}$.
- $\mathrm{D} = 0$, $\mathrm{D}_x \neq 0$ hoặc $\mathrm{D}_y \neq 0$ : (2) vô nghiệm.
- $\mathrm{D} = \mathrm{D}_x = \mathrm{D}_y = 0$ : (2) có vô số nghiệm $(x\ ;\ y)$ tính theo công thức

$$\begin{cases} x = \dfrac{-by + c}{a} \\ y \in \mathbb{R} \end{cases} \text{(nếu } a \neq 0\text{) hoặc } \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = \dfrac{-ax + c}{b} \end{cases} \text{(nếu } b \neq 0\text{).}$$

*Chú ý*

Khi giải và biện luận hệ phương trình có chứa tham số dạng

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c', \end{cases}$$

có thể xảy ra trường hợp $a = b = 0$ (hoặc $a' = b' = 0$). Khi đó, ta sử dụng các kết luận dễ thấy sau đây :

– Phương trình $0x + 0y = c$ vô nghiệm nếu $c \neq 0$, nghiệm đúng với mọi $x$ và với mọi $y$ nếu $c = 0$.

– Trong một hệ phương trình, nếu một phương trình của hệ vô nghiệm thì hệ vô nghiệm.

– Trong một hệ hai phương trình, nếu một phương trình của hệ nghiệm đúng với mọi giá trị của các ẩn thì tập nghiệm của hệ phương trình đó trùng với tập nghiệm của phương trình còn lại.

### 7. Giải hệ phương trình bậc hai hai ẩn

1) Hệ phương trình trong đó có một phương trình bậc nhất : Dùng phương pháp thế.

2) Hệ phương trình mà mỗi phương trình trong hệ không thay đổi khi thay thế đồng thời $x$ bởi $y$ và $y$ bởi $x$ : Dùng phương pháp đặt ẩn phụ

$$S = x + y \; ; \; P = xy.$$

## B. ĐỀ BÀI

## §1. ĐẠI CƯƠNG VỀ PHƯƠNG TRÌNH

**3.1.** Tìm điều kiện của mỗi phương trình sau rồi suy ra tập nghiệm của nó :

a) $x - \sqrt{x-3} = \sqrt{3-x} + 3$ ; b) $\sqrt{-x^2 + 4x - 4} = x^2 - 4$ ;

c) $\sqrt{x} - \sqrt{1-x} = \sqrt{-x-2}$ ; d) $x + 2\sqrt{x+1} = 1 - \sqrt{-x-1}$.

**3.2.** Tìm nghiệm nguyên của mỗi phương trình sau bằng cách xét điều kiện xác định của nó :

a) $\sqrt{4-x} - 2 = \sqrt{x} - x$ ; b) $3\sqrt{x+2} = \sqrt{2-x} + 2\sqrt{2}$

**3.3.** Giải các phương trình sau :

a) $x + \sqrt{x} = \sqrt{x} - 1$ ; b) $x^2 + \sqrt{2-x} = \sqrt{2-x} + 9$.

**3.4.** Trong các phép biến đổi sau, phép biến đổi nào cho ta phương trình tương đương, phép biến đổi nào không cho ta phương trình tương đương ?

a) Lược bỏ số hạng $\dfrac{7}{x-1}$ ở cả hai vế của phương trình

$$x^2 + 1 + \frac{7}{x-1} = 2x + \frac{7}{x-1} \; ;$$

b) Lược bỏ số hạng $\frac{5}{x-2}$ ở cả hai vế của phương trình

$$x^2 + 1 + \frac{5}{x-2} = 2x + \frac{5}{x-2} \ ;$$

c) Thay thế $\left(\sqrt{2x-1}\right)^2$ bởi $2x - 1$ trong phương trình

$$\left(\sqrt{2x-1}\right)^2 = 3x + 2 \ ;$$

d) Chia cả hai vế của phương trình $x + 3 = x^2 + 3$ cho $x$ ;

e) Nhân cả hai vế của phương trình $\frac{x^2+1}{x} = 2 + \frac{1}{x}$ với $x$.

**3.5.** Trong các phép biến đổi nêu trong bài tập 3.4, phép biến đổi nào cho ta phương trình hệ quả ?

**3.6.** Kiểm tra lại rằng các biến đổi sau đây làm mất nghiệm của phương trình :

a) Chia cả hai vế của phương trình sau cho $x^2 - 3x + 2$

$$(x + 1)(x^2 - 3x + 2) = x^2 - 3x + 2 \ ;$$

b) Chia cả hai vế của phương trình sau cho $\sqrt{x-1}$

$$(x + 4)\sqrt{x-1} = \left(\sqrt{x-1}\right)^3.$$

**3.7.** Giải các phương trình sau bằng cách bình phương hai vế :

a) $|2x + 3| = 1$ ; b) $|2 - x| = 2x - 1$ ;

c) $\sqrt{3x-2} = 1 - 2x$ ; d) $\sqrt{5-2x} = \sqrt{x-1}$.

**3.8.** Tìm điều kiện xác định của phương trình hai ẩn sau rồi suy ra tập nghiệm của nó

$$\sqrt{-x^2 - (y+1)^2} + xy = (x + 1)(y + 1).$$

## §2. PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT VÀ BẬC HAI MỘT ẨN

### *Phương trình bậc nhất*

**3.9.** Tìm các giá trị của $p$ để phương trình sau vô nghiệm

$$(4p^2 - 2)x = 1 + 2p - x.$$

**3.10.** Tìm các giá trị của $q$ để mỗi phương trình sau có vô số nghiệm :

a) $2qx - 1 = x + q$ ; b) $q^2x - q = 25x - 5$.

**3.11.** Tìm các giá trị của $m$ để mỗi phương trình sau chỉ có một nghiệm :

a) $(x - m)(x - 1) = 0$ ; b) $m(m - 1)x = m^2 - 1$.

**3.12.** Giải và biện luận các phương trình sau theo tham số $m$ :

a) $2mx = 2x + m + 4$ ; b) $m(x + m) = x + 1$.

### ***Phương trình bậc hai***

**3.13.** Với mỗi phương trình sau, biết một nghiệm, hãy tìm tham số $m$ và nghiệm còn lại :

a) $(2m^2 - 7m + 5)x^2 + 3mx - (5m^2 - 2m + 8) = 0$ có một nghiệm là 2.

b) $(5m^2 + 2m - 4)x^2 - 2mx - (2m^2 - m + 4) = 0$ có một nghiệm là $-1$.

**3.14.** Giải và biện luận các phương trình sau theo tham số $m$ :

a) $mx^2 + 2x + 1 = 0$ ;

b) $2x^2 - 6x + 3m - 5 = 0$ ;

c) $(m + 1)x^2 - (2m + 1)x + (m - 2) = 0$ ;

d) $(m^2 - 5m - 36)x^2 - 2(m + 4)x + 1 = 0$.

**3.15.** Tìm các giá trị của tham số $m$ để mỗi phương trình sau có hai nghiệm bằng nhau :

a) $x^2 - 2(m - 1)x + 2m + 1 = 0$ ;

b) $3mx^2 + (4 - 6m)x + 3(m - 1) = 0$ ;

c) $(m - 3)x^2 - 2(3m - 4)x + 7m - 6 = 0$ ;

d) $(m - 2)x^2 - mx + 2m - 3 = 0$.

**3.16.** Biện luận số giao điểm của hai parabol sau theo tham số $m$ :

$$y = x^2 + mx + 8 \text{ và } y = x^2 + x + m.$$

### ***Định lí Vi-ét***

**3.17.** Với mỗi phương trình sau, biết một nghiệm, tìm $m$ và nghiệm còn lại :

a) $x^2 - mx + 21 = 0$ có một nghiệm là 7 ;

b) $x^2 - 9x + m = 0$ có một nghiệm là $-3$ ;

c) $(m - 3)x^2 - 25x + 32 = 0$ có một nghiệm là 4.

**3.18.** Giả sử $x_1$, $x_2$ là các nghiệm của phương trình $2x^2 - 11x + 13 = 0$.

Hãy tính :

a) $x_1^3 + x_2^3$ ;   b) $x_1^4 + x_2^4$ ;

c) $x_1^4 - x_2^4$ ;   d) $\frac{x_1}{x_2}\left(1 - x_2^2\right) + \frac{x_2}{x_1}\left(1 - x_1^2\right)$.

**3.19.** Giả sử $x_1$, $x_2$ là các nghiệm của phương trình $x^2 + 2mx + 4 = 0$.

Hãy tìm tất cả các giá trị của $m$ để có đẳng thức :

$$\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2 = 3.$$

**3.20.** Tìm tất cả các giá trị của $a$ để hiệu hai nghiệm của phương trình sau bằng 1

$$2x^2 - (a + 1)x + a + 3 = 0.$$

**3.21.** Giả sử $x_1$ và $x_2$ là các nghiệm của phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$. Hãy biểu diễn các biểu thức sau đây qua các hệ số $a$, $b$ và $c$

a) $x_1^2 + x_2^2$ ;   b) $x_1^3 + x_2^3$ ;

c) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ ;   d) $x_1^2 - 4x_1x_2 + x_2^2$.

**3.22.** Tìm tất cả các giá trị dương của $k$ để các nghiệm của phương trình

$$2x^2 - (k + 2)x + 7 = k^2$$

trái dấu nhau và có giá trị tuyệt đối là nghịch đảo của nhau.

**3.23.** Hãy tìm tất cả các giá trị của $k$ để phương trình bậc hai

$$(k + 2)x^2 - 2kx - k = 0$$

có hai nghiệm mà sắp xếp trên trục số, chúng đối xứng nhau qua điểm $x = 1$.

**3.24.** Giả sử $a$, $b$ là hai số thoả mãn $a > b > 0$. Không giải phương trình

$$abx^2 - (a + b)x + 1 = 0,$$

hãy tính tỉ số giữa tổng hai nghiệm và hiệu giữa nghiệm lớn và nghiệm nhỏ của phương trình đó.

**3.25.** Giải các phương trình sau đây :

a) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ ;　　b) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ ;

c) $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$ ;　　d) $x^4 - 24x^2 - 25 = 0$.

**3.26.** Các hệ số $a$, $b$ và $c$ của phương trình trùng phương $ax^4 + bx^2 + c = 0$ phải thoả mãn điều kiện gì để phương trình đó

a) Vô nghiệm ?　　b) Có một nghiệm ?

c) Có hai nghiệm ?　　d) Có ba nghiệm ?

e) Có bốn nghiệm ?

## §3. MỘT SỐ PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HOẶC BẬC HAI

**3.27.** Giải và biện luận các phương trình sau theo tham số $a$ :

a) $\dfrac{3}{x-1} = a$ ;　　b) $\dfrac{2a-1}{x-2} = a - 3$ ;　　c) $\dfrac{a}{ax+3} = 2$.

**3.28.** Giải các phương trình :

a) $\sqrt{x^2 + x + 1} = 3 - x$ ;

b) $\sqrt{x^2 + 6x + 9} = |2x - 1|$ ;

c) $x(x+1) + x(x+2) = x(x+4)$ ;

d) $\left(\dfrac{1+x}{1-x} - \dfrac{1-x}{1+x}\right) : \left(\dfrac{1+x}{1-x} - 1\right) = \dfrac{3}{14-x}$.

**3.29.** Giải các phương trình :

a) $\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{2}{x-2} = 1$ ;

b) $\dfrac{2x-1}{x+1} + \dfrac{3x-1}{x+2} = \dfrac{x-7}{x-1} + 4$ ;

c) $\dfrac{x-1}{x} - \dfrac{3x}{2x-2} = -\dfrac{5}{2}$.

**3.30.** Giải các phương trình :

a) $\dfrac{4x}{x^2+x+3}+\dfrac{5x}{x^2-5x+3}=-\dfrac{3}{2}$ ;

b) $\dfrac{x-1}{x+2}-\dfrac{x-2}{x+3}=\dfrac{x-4}{x+5}-\dfrac{x-5}{x+6}$.

**3.31.** Giải và biện luận các phương trình sau theo tham số $m$ :

a) $|3mx-1|=5$ ;

b) $|3x+m|=|2x-2m|$ ;

**3.32.** Giải và biện luận các phương trình sau :

a) $(x-2)(x-mx+3)=0$ ;

b) $\dfrac{(x+1)(mx+2)}{x-3m}=0$ ;

c) $\dfrac{mx-1}{x-1}+\dfrac{m}{x+1}=\dfrac{m(x^2+1)}{x^2-1}$.

**3.33.** Cho tam giác $ABC$ nhọn có cạnh $BC=a$, đường cao $AH=h$. Một hình chữ nhật $MNPQ$ nội tiếp trong tam giác ($M\in AB$ ; $N\in AC$ ; $P, Q\in BC$) có chu vi bằng $2p$ ($p$ là độ dài cho trước). Hãy tính độ dài cạnh $PQ$ của hình chữ nhật $MNPQ$, biện luận theo $p$, $a$, $h$.

## §4. PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT NHIỀU ẨN

**3.34.** Xét tập hợp các điểm có toạ độ $(x\ ;\ y)$ là nghiệm của phương trình $ax+by=c$. Tìm điều kiện của $a$, $b$, $c$ để :

a) Tập hợp điểm đó là một đường thẳng đi qua gốc toạ độ ;

b) Tập hợp điểm đó là một đường thẳng song song với trục tung ;

c) Tập hợp điểm đó là một đường thẳng song song với trục hoành ;

d) Tập hợp điểm đó là trục tung ;

e) Tập hợp điểm đó là trục hoành ;

g) Tập hợp đó là một đường thẳng cắt hai trục $Ox$ và $Oy$ tại hai điểm phân biệt.

**3.35.** Giải các phương trình sau và minh hoạ tập nghiệm trên mặt phẳng toạ độ :

a) $2x + 3y = 5$ ; b) $0.x + 3y = 6$ ;

c) $2x + 0.y = 4$ ; d) $2x + 3y = 0$.

**3.36.** Giải và biện luận các phương trình sau theo tham số $m$ :

a) $mx + (m - 1)y = 5$ ; b) $mx + my = m + 1$.

**3.37.** Bằng định thức, hãy giải các hệ phương trình sau :

a) $\begin{cases} 3x + 2y = -7 \\ 5x - 3y = 1 ; \end{cases}$ b) $\begin{cases} \sqrt{2}x + 4y = 1 \\ 2x + 4\sqrt{2}y = 5. \end{cases}$

**3.38.** Tính nghiệm gần đúng của các hệ phương trình sau (chính xác đến hàng phần trăm) :

a) $\begin{cases} \sqrt{5}x + \sqrt{3}y = \sqrt{2} \\ \sqrt{2}x - \sqrt{3}y = \sqrt{5} ; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x + (\sqrt{5} - 2)y = 1 \\ (\sqrt{2} - 1)x + \sqrt{3}y = \sqrt{5}. \end{cases}$

**3.39.** Giải và biện luận các hệ phương trình theo tham số $a$ :

a) $\begin{cases} ax + 2y = 1 \\ x + (a - 1)y = a. \end{cases}$ b) $\begin{cases} (a - 2)x + (a - 4)y = 2 \\ (a + 1)x + (3a + 2)y = -1 ; \end{cases}$

c) $\begin{cases} (a - 1)x + (2a - 3)y = a \\ (a + 1)x + 3y = 6 ; \end{cases}$ d) $\begin{cases} \dfrac{3(x + y)}{x - y} = a \\ \dfrac{2x - y - a}{y - x} = 1. \end{cases}$

**3.40.** Giải các hệ phương trình :

a) $\begin{cases} 3|x| + 5y - 9 = 0 \\ 2x - |y| = 7 ; \end{cases}$ b) $\begin{cases} |x| - a = 1 \\ y - 2x = 5 \end{cases}$ ($a$ là tham số).

**3.41.** Giải hệ các phương trình

a) $\begin{cases} \dfrac{6}{x} + \dfrac{5}{y} = 3 \\ \dfrac{9}{x} - \dfrac{10}{y} = 1. \end{cases}$ b) $\begin{cases} \dfrac{6}{x - 2y} + \dfrac{2}{x + 2y} = 3 \\ \dfrac{3}{x - 2y} + \dfrac{4}{x + 2y} = -1. \end{cases}$

**3.42.** Một ca nô chạy trên sông trong 8 giờ, xuôi dòng 135 km và ngược dòng 63 km. Một lần khác, ca nô cũng chạy trên sông trong 8 giờ, xuôi dòng 108 km và ngược dòng 84 km. Tính vận tốc dòng nước chảy và vận tốc của ca nô (biết rằng vận tốc thật của ca nô và vận tốc dòng nước chảy trong cả hai lần là bằng nhau và không đổi).

**3.43.** Cho hai đường thẳng $(d_1) : (m - 1)x + y = 5$ và $(d_2) : 2x + my = 10$.

a) Tìm $m$ để hai đường thẳng $(d_1)$ và $(d_2)$ cắt nhau.

b) Tìm $m$ để hai đường thẳng $(d_1)$ và $(d_2)$ song song.

c) Tìm $m$ để hai đường thẳng $(d_1)$ và $(d_2)$ trùng nhau.

**3.44.** Cho ba đường thẳng $(d_1) : 2x + 3y = -4$ ;

$$(d_2) : 3x + y = 1 \ ;$$

$$(d_3) : 2mx + 5y = m.$$

a) Với giá trị nào của $m$ thì $(d_1)$, $(d_2)$, $(d_3)$ đồng quy tại một điểm ?

b) Với giá trị nào của $m$ thì $(d_2)$ và $(d_3)$ vuông góc với nhau ?

**3.45.** Viết phương trình của đường thẳng trong mỗi trường hợp sau :

a) Cắt trục $Ox$ tại điểm có hoành độ là 5 và cắt trục $Oy$ tại điểm có tung độ là $-2$.

b) Đi qua hai điểm $A(1 ; -1)$ và $B(3 ; 5)$.

**3.46.** Giải các hệ phương trình bậc nhất ba ẩn :

a) $\begin{cases} x + y = 25 \\ y + z = 30 \\ z + x = 29 \ ; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + y + 3z = 2 \\ -x + 4y - 6z = 5 \\ 5x - y + 3z = -5. \end{cases}$

**3.47.** Sử dụng máy tính bỏ túi để tìm nghiệm gần đúng của hệ phương trình sau (chính xác đến hàng phần trăm) :

a) $\begin{cases} 4x + \sqrt{2}y + z = 1 \\ \sqrt{3}x + \sqrt{3}y + 2z = \sqrt{2} \\ x + \sqrt{5}y + 3z = \sqrt{3} \ ; \end{cases}$ b) $\begin{cases} (\sqrt{2} + 1)x + y + \sqrt{3}z = -1 \\ x + \sqrt{2}y + \sqrt{5}z = \sqrt{2} \\ \sqrt{3}x + (\sqrt{3} + 1)y - z = \sqrt{5}. \end{cases}$

**3.48.** Có ba lớp học sinh $10A$, $10B$, $10C$ gồm 128 em cùng tham gia lao động trồng cây. Mỗi em lớp $10A$ trồng được 3 cây bạch đàn và 4 cây bàng. Mỗi em lớp $10B$ trồng được 2 cây bạch đàn và 5 cây bàng. Mỗi em lớp $10C$ trồng được 6 cây bạch đàn. Cả ba lớp trồng được là 476 cây bạch đàn và 375 cây bàng. Hỏi mỗi lớp có bao nhiêu học sinh ?

**3.49.** *Bài toán cổ.* Hãy giải bài toán dân gian sau :

*Em đi chợ phiên*
*Anh gửi một tiền*
*Cam, thanh yên, quýt*
*Không nhiều thì ít*
*Mua đủ một trăm*
*Cam ba đồng một*
*Quýt một đồng năm*
*Thanh yên tươi tốt*
*Năm đồng một trái*

Hỏi mỗi thứ mua bao nhiêu trái, biết rằng một tiền là 60 đồng ?

## §5 MỘT SỐ VÍ DỤ VỀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI HAI ẨN

Giải các hệ phương trình sau

**3.50.** a) $\begin{cases} 2x - y - 7 = 0 \\ y^2 - x^2 + 2x + 2y + 4 = 0 ; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4x + 9y = 6 \\ 3x^2 + 6xy - x + 3y = 0 ; \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x^2 + x + y + 1 = 0 \\ x^2 + 12x + 2y + 10 = 0. \end{cases}$

**3.51.** a) $\begin{cases} (x + y + 2)(2x + 2y - 1) = 0 \\ 3x^2 - 32y^2 + 5 = 0 ; \end{cases}$ b) $\begin{cases} (x + 2y + 1)(x + 2y + 2) = 0 \\ xy + y^2 + 3y + 1 = 0. \end{cases}$

**3.52.** a) $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 7 \\ x + xy + y = 5 ; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3(x + y) = xy \\ x^2 + y^2 = 160 ; \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^2 + y^2 - x - y = 102 \\ xy + x + y = 69. \end{cases}$

**3.53.** a) $\begin{cases} 2x^2 - y^2 = 1 \\ xy + x^2 = 2\,; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 - 2xy \\ y(x + y) = 10\,; \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2(x + y)^2 + 2(x - y)^2 = 5(x^2 - y^2) \\ x^2 + y^2 = 20. \end{cases}$

## BÀI TẬP ÔN TẬP CHƯƠNG III

**3.54.** Phương trình dạng $ax + b = 0$ (ẩn $x$) vô nghiệm trong trường hợp nào, có vô số nghiệm trong trường hợp nào ?

*Áp dụng*. Tìm các giá trị của tham số $m$ sao cho phương trình

$$m(m - 2)x = m$$

a) Có nghiệm duy nhất ; b) Vô nghiệm ;

c) Có vô số nghiệm ; d) Có nghiệm.

**3.55.** Cho hệ phương trình

(I) $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ (ẩn là $x$ và $y$) thoả mãn điều kiện $a'b'c' \neq 0$.

Chứng minh rằng :

a) Nếu $\dfrac{a}{a'} \neq \dfrac{b}{b'}$ thì hệ (I) có nghiệm duy nhất.

b) Nếu $\dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} \neq \dfrac{c}{c'}$ thì hệ (I) vô nghiệm.

c) Nếu $\dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} = \dfrac{c}{c'}$ thì hệ (I) có vô số nghiệm.

*Áp dụng*. Tìm các giá trị của tham số $a$ sao cho hệ phương trình

$$\begin{cases} (a + 1)x + 3y = a \\ x + (a - 1)y = 2 \end{cases}$$

có vô số nghiệm.

**3.56.** Giải và biện luận các phương trình theo tham số $m$ :

a) $(2m^2 - 1)x - 2 = m - 4x$ ;

b) $m^2(x - 1) + 1 = -(4m + 3)x$ ;

c) $m(x + 1) = m^2 - 6 - 2x$.

**3.57.** Giải và biện luận các phương trình theo tham số $m$ :

a) $\dfrac{(2m - 1)x + 2}{x - 2} = m + 1$ ;

b) $\dfrac{(m - 1)(m + 2)x}{2x + 1} = m + 2$.

**3.58.** Giải các hệ phương trình :

a) $\begin{cases} 2x - y + 3z = 4 \\ 3x - 2y + 2z = 3 \\ 5x - 4y = 2 \text{ ;} \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y = 16 \\ y + z = 28 \\ z + x = 22 \text{ ;} \end{cases}$

c) $\begin{cases} |x - y| = \sqrt{2} \\ 2x - y = -1. \end{cases}$

**3.59.** Cho hệ phương trình $\begin{cases} (m - 1)x + (m + 1)y = m \\ (3 - m)x + 3y = 2. \end{cases}$

a) Tìm các giá trị của $m$ để hệ phương trình có nghiệm. Khi đó, hãy tính theo $m$ các nghiệm của hệ.

b) Tìm nghiệm gần đúng của hệ, chính xác đến hàng phần nghìn khi $m = \sqrt{5} - 2$.

**3.60.** Giải và biện luận các phương trình theo tham số $m$ :

a) $|2x + m| = |2x + 2m - 1|$ ;

b) $|mx + 1| = |2x - m - 3|$ ;

c) $(mx - 2)(2x + 4) = 0$.

**3.61.** Giải các phương trình

a) $1 + \dfrac{2}{x - 2} = \dfrac{10}{x + 3} - \dfrac{50}{(2 - x)(x + 3)}$ ;

b) $\dfrac{x^2 - |x| - 12}{x - 3} = 2x$.

**3.62.** Sử dụng đồ thị để biện luận số nghiệm của các phương trình sau theo tham số $k$ :

a) $3x^2 - 2x = k$ ;

b) $x^2 - 3|x| - k + 1 = 0$.

**3.63.** Cho hàm số $y = x^2 + x - 2$ có đồ thị là parabol $(P)$, hàm số $y = 3x + k$ có đồ thị là đường thẳng $(d)$.

a) Hãy biện luận số nghiệm của phương trình $x^2 + x - 2 = 3x + k$, từ đó suy ra số điểm chung của parabol $(P)$ và đường thẳng $(d)$.

b) Với giá trị nào của $k$ thì đường thẳng $(d)$ cắt parabol $(P)$ tại hai điểm nằm ở hai phía khác nhau của trục tung ?

c) Với giá trị nào của $k$ thì đường thẳng $(d)$ cắt parabol $(P)$ tại hai điểm phân biệt ở về cùng một phía của trục tung. Khi đó hai điểm ấy nằm ở phía nào của trục tung ?

**3.64.** Cho hai phương trình $x^2 - 5x + k = 0$ (1) và $x^2 - 7x + 2k = 0$ (2).

a) Với giá trị nào của $k$ thì phương trình (1) có hai nghiệm và nghiệm này gấp đôi nghiệm kia ?

b) Với giá trị nào của $k$ thì phương trình (2) có hai nghiệm $x_1$ và $x_2$ thoả mãn $x_1^2 + x_2^2 = 25$ ?

c) Với giá trị nào của $k$ thì cả hai phương trình cùng có nghiệm và một trong các nghiệm của phương trình (2) gấp đôi một trong các nghiệm của phương trình (1) ?

**3.65.** Giải các hệ phương trình sau :

a) $\begin{cases} 2x^2 - xy + 3y^2 = 7x + 12y - 1 \\ x - y + 1 = 0 ; \end{cases}$

b) $\begin{cases} (2x + 3y - 2)(x - 5y - 3) = 0 \\ x - 3y = 1 ; \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x(y - 3) + 2y(x - 3) + 9 = 0 \\ 2(x + y) - xy + 6 = 0 ; \end{cases}$

d) $\begin{cases} x^2 - 2y^2 = 7x \\ y^2 - 2x^2 = 7y. \end{cases}$

**3.66.** Cho hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2(a + 1) \\ (x + y)^2 = 4. \end{cases}$

a) Giải hệ phương trình với $a = 2$.

b) Tìm các giá trị của $a$ để hệ có nghiệm duy nhất.

# GIỚI THIỆU MỘT SỐ CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN

*Trong các bài từ 3.67 đến 3.71, hãy chọn phương án trả lời đúng trong các phương án đã cho.*

**3.67.** Điều kiện xác định của phương trình $x + \frac{1}{\sqrt{2x+4}} = \frac{\sqrt{3-2x}}{x}$ là

(A) $x > -2$ và $x \neq 0$ ;

(B) $x > -2$, $x \neq 0$ và $x \leq \frac{3}{2}$ ;

(C) $x > -2$ và $x < \frac{3}{2}$ ;

(D) Không phải các phương án trên.

**3.68.** Cặp $(x ; y) = (1 ; 2)$ là nghiệm của phương trình

(A) $3x + 2y = 7$ ;

(B) $x - 2y = 5$ ;

(C) $0.x + 3y = 4$ ;

(D) $3x + 0.y = 2$.

**3.69.** Nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} 3x + 4y = -5 \\ -2x + y = -4 \end{cases}$ là

(A) $(1 ; -2)$ ;

(B) $\left(\frac{1}{3} ; \frac{-7}{4}\right)$ ;

(C) $\left(\frac{-1}{3} ; -5\right)$ ;

(D) $(-2 ; 1)$.

**3.70.** Cho phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm $x_1, x_2$ cùng khác 0.

Phương trình bậc hai nhận $\frac{1}{x_1}$ và $\frac{1}{x_2}$ làm nghiệm là :

(A) $cx^2 + bx + a = 0$ ;

(B) $bx^2 + ax + c = 0$ ;

(C) $cx^2 + ax + b = 0$ ;

(D) $ax^2 + cx + b = 0$.

**3.71.** Tập nghiệm của phương trình $\frac{(m^2+1)x - 1}{x+1} = 1$ trong trường hợp $m \neq 0$ là

(A) $S = \left\{\frac{m+1}{m^2}\right\}$ ;

(B) $S = \varnothing$ ;

(C) $S = \mathbb{R}$ ;

(D) Không phải các phương án trên.

*Trong các bài 3.72 và 3.73 , hãy ghép mỗi dòng ở cột trái với một dòng ở cột phải để được một khẳng định đúng.*

**3.72.** Cho phương trình $x^2 + 2mx + m^2 - 2m - 1 = 0$.

| | |
|---|---|
| a) Nếu $m > \frac{-1}{2}$<br>b) Nếu $m < \frac{-1}{2}$<br>c) Nếu $m = \frac{-1}{2}$ | 1) thì phương trình đã cho vô nghiệm.<br>2) thì phương trình đã cho có vô số nghiệm.<br>3) thì phương trình đã cho có một nghiệm kép.<br>4) thì phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt. |

**3.73.** Cho hệ phương trình $\begin{cases} mx + 9y = 6 \\ x + my = -2. \end{cases}$

| | |
|---|---|
| a) Nếu $m = 3$<br>b) Nếu $m = -3$<br>c) Nếu $m \neq \pm 3$ | 1) thì hệ phương trình đã cho vô nghiệm.<br>2) thì hệ phương trình đã cho có một nghiệm.<br>3) thì hệ phương trình đã cho có vô số nghiệm.<br>4) thì hệ phương trình đã cho nghiệm đúng với mọi giá trị của hai ẩn. |

## C. ĐÁP SỐ – HƯỚNG DẪN – LỜI GIẢI

**3.1.** a) $S = \{3\}$ ; b) $S = \{2\}$.

c) Không có số thực nào thoả mãn đồng thời hai điều kiện $x \geq 0$ và $-x - 2 \geq 0$. Vậy phương trình vô nghiệm.

d) Phương trình vô nghiệm.

**3.2.** a) Điều kiện xác định của phương trình là $0 \leq x \leq 4$. Thử trực tiếp các giá trị của $x$ thuộc tập $\{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4\}$ vào phương trình, ta thấy phương trình có các nghiệm $x = 0$ ; $x = 4$ và $x = 2$.

b) Điều kiện xác định của phương trình là $-2 \leq x \leq 2$. Thử trực tiếp các giá trị của $x$ thuộc tập $\{-2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2\}$ vào phương trình, ta thấy phương trình có một nghiệm $x = 0$.

**3.3.** a) Vô nghiệm. b) $x = -3$.

**3.4.** a) Không ; b) Có ; c) Không ; d) Không ; e) Không.

**3.5.** a), b), c) và e).

**3.6.** a) Ta thấy khi $x = 1$ hoặc $x = 2$ thì $x^2 - 3x + 2 = 0$. Do đó $x = 1$ và $x = 2$ là hai trong các nghiệm của phương trình đã cho. Nhưng sau khi biến đổi, ta được phương trình $x + 1 = 1$ ; phương trình này không nhận $x = 1$ và $x = 2$ làm nghiệm.

b) Sau khi biến đổi, ta được phương trình $(x + 4) = (\sqrt{x-1})^2$ Phương trình này không nhận $x = 1$ làm nghiệm, trong khi $x = 1$ là nghiệm của phương trình ban đầu.

*Chú ý*. Hai bài toán trên cho thấy : Nếu chia cả hai vế của một phương trình cho một biểu thức thì có thể làm mất nghiệm của phương trình.

**3.7.** a) $x = -1$ và $x = -2$ ; b) $x = 1$ ; c) Vô nghiệm ; d) $x = 2$.

**3.8.** Điều kiện của phương trình là $-x^2 - (y + 1)^2 \geq 0$ hay $x^2 + (y + 1)^2 \leq 0$. Điều này tương đương với $x = (y + 1) = 0$, tức là $(x ; y) = (0 ; -1)$ (vì nếu trái lại, em hãy chứng minh rằng ta luôn có $x^2 + (y + 1)^2 > 0$). Thử trực tiếp $x = 0$ và $y = -1$ vào phương trình, ta thấy cặp số $(0 ; -1)$ đúng là nghiệm của phương trình đã cho).

**3.9.** $p = \dfrac{1}{2}$

**3.10.** a) $2qx - 1 = x + q \Leftrightarrow (2q - 1)x = q + 1$.

Phương trình đã cho có vô số nghiệm khi và chỉ khi $\begin{cases} q + 1 = 0 \\ 2q - 1 = 0 \end{cases}$

Không có số $q$ nào thoả mãn điều kiện này.

b) $q = 5$.

**3.11.** a) $(x - m)(x - 1) = 0 \Leftrightarrow x - m = 0$ hoặc $x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = m$ hoặc $x = 1$.

Vậy phương trình chỉ có một nghiệm khi $m = 1$.

b) $m \neq 0$ và $m \neq 1$.

**3.12.** a) Ta có :

$$2mx = 2x + m + 4 \Leftrightarrow 2(m-1)x = m + 4 \qquad (1)$$

– Với $m - 1 \neq 0$ hay $m \neq 1$, chia hai vế của (1) cho $2(m-1)$ ta được $x = \dfrac{m+4}{2(m-1)}$

– Với $m - 1 = 0$ hay $m = 1$, phương trình (1) trở thành $0x = 5$, vô nghiệm.

b) Phương trình có nghiệm duy nhất $x = -(m+1)$ khi $m \neq 1$, nghiệm đúng với mọi $x$ khi $m = 1$.

**3.13.** a) Do $x = 2$ là nghiệm nên thay vào phương trình ta được :

$4(2m^2 - 7m + 5) + 6m - (5m^2 - 2m + 8) = 0$ hay $3m^2 - 20m + 12 = 0$.

Giải phương trình trên (ẩn là $m$) ta có kết quả $m \in \left\{6 \,;\, \dfrac{2}{3}\right\}$.

Với $m = 6$, phương trình đã cho trở thành

$$35x^2 + 18x - 176 = 0$$

và có hai nghiệm là $x_1 = 2$ và $x_2 = -\dfrac{88}{35}$.

Với $m = \dfrac{2}{3}$, phương trình đã cho trở thành

$$\frac{11}{9}x^2 + 2x - \frac{80}{9} = 0$$

và có hai nghiệm là $x_1 = 2$ và $x_2 = -\dfrac{40}{11}$

b) Với $m = 1$, nghiệm thứ hai là $\dfrac{5}{3}$ ; với $m = -\dfrac{8}{3}$, nghiệm thứ hai là $\dfrac{47}{59}$

**3.14.** a) Nếu $m = 0$ thì phương trình có nghiệm $x = -\dfrac{1}{2}$

Nếu $m \neq 0$ thì phương trình có $\Delta' = 1 - m$.

+ Nếu $1 - m < 0$ tức là $m > 1$ thì phương trình đã cho vô nghiệm.

+ Nếu $1 - m = 0$ tức là $m = 1$ thì phương trình đã cho có một nghiệm kép $x = -1$.

+ Nếu $1 - m > 0$ tức là $m < 1$ thì phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt

$$x_1 = \frac{-1 - \sqrt{1 - m}}{m} \text{ và } x_2 = \frac{-1 + \sqrt{1 - m}}{m}.$$

Vậy, với $m \in (-\infty ; 0) \cup (0 ; 1)$ thì phương trình có hai nghiệm

$$x_1 = \frac{-1 - \sqrt{1 - m}}{m} \text{ và } x_2 = \frac{-1 + \sqrt{1 - m}}{m}.$$

Với $m = 0$, phương trình có nghiệm $x = -\frac{1}{2}$.

Với $m = 1$, phương trình có nghiệm kép $x = -1$.

Với $m \in (1 ; +\infty)$, phương trình vô nghiệm

b) Phương trình có $\Delta' = 9 - 2(3m - 5) = -6m + 19$.

Với $m \in \left(\frac{19}{6} ; +\infty\right)$, phương trình vô nghiệm.

Với $m = \frac{19}{6}$, phương trình có nghiệm kép $x = \frac{3}{2}$

Với $m \in \left(-\infty ; \frac{19}{6}\right)$, phương trình có hai nghiệm

$$x = \frac{3 - \sqrt{19 - 6m}}{2} \text{ và } x = \frac{3 + \sqrt{19 - 6m}}{2}$$

c) Với $m = -1$, phương trình có nghiệm $x = 3$.

Với $m \neq -1$, phương trình có $\Delta = (2m + 1)^2 - 4(m + 1)(m - 2) = 8m + 9$.

Do đó, với $m \in \left(-\infty ; -\frac{9}{8}\right)$, phương trình vô nghiệm.

Với $m = -\frac{9}{8}$, phương trình có một nghiệm kép $x = 5$.

Với $m \in \left(-\frac{9}{8} ; 1\right) \cup (1 ; +\infty)$, phương trình có hai nghiệm

$$x = \frac{2m + 1 - \sqrt{8m + 9}}{2(m + 1)} \text{ và } x = \frac{2m + 1 + \sqrt{8m + 9}}{2(m + 1)}$$

d) $m^2 - 5m - 36 = 0 \Leftrightarrow m = -4$ hoặc $m = 9$

Với $m = -4$, phương trình trở thành $0x = 1$ nên vô nghiệm.

Với $m = 9$, phương trình trở thành $-26x + 1 = 0$ nên có nghiệm $x = \frac{1}{26}$.

Với $m \notin \{-4 ; 9\}$, ta có

$\Delta' = (m + 4)^2 - (m^2 - 5m - 36) = 13m + 52$ Từ đó suy ra :

Với $m \in (-\infty ; -4]$, phương trình vô nghiệm .

Với $m \in (-4 ; 9) \cup (9 ; +\infty)$, phương trình có hai nghiệm

$$x = \frac{m + 4 - \sqrt{13(m + 4)}}{m^2 - 5m - 36} \text{ và } x = \frac{m + 4 + \sqrt{13(m + 4)}}{m^2 - 5m - 36}.$$

Với $m = 9$, phương trình có nghiệm $x = \frac{1}{26}$

**3.15.** a) $m \in \{0;4\}$ ; b) $m = \frac{4}{3}$ ;

c) $m \in \left\{-2; \frac{1}{2}\right\}$ ; d) $m = \frac{14 \pm 2\sqrt{7}}{7}$

**3.16.** Hoành độ giao điểm hai parabol là nghiệm của phương trình

$$x^2 + mx + 8 = x^2 + x + m.$$

Phương trình trên tương đương với phương trình $(1 - m)x = 8 - m$.

Từ đó suy ra :

Nếu $m = 1$ thì hai đồ thị không có điểm chung.

Nếu $m \neq 1$ thì hai đồ thị có một điểm chung.

**3.17.** a) Gọi nghiệm thứ hai là $x_2$. Theo định lí Vi-ét, ta có :

$$\begin{cases} 7 + x_2 = m \\ 7x_2 = 21. \end{cases}$$

Giải hệ trên ta được $x_2 = 3$, $m = 10$.

b) $x_2 = 12$ ; $m = -36$.

c) $x_2 = \frac{32}{17}$ ; $m = \frac{29}{4}$.

**3.18.** Theo định lí Vi-ét ta có $x_1 + x_2 = \dfrac{11}{2}$ ; $x_1.x_2 = \dfrac{13}{2}$ (dễ thấy hai nghiệm đều dương). Do đó :

a) $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3\,x_1x_2\,(x_1 + x_2) = \left(\dfrac{11}{2}\right)^3 - 3.\dfrac{13}{2}.\dfrac{11}{2} = \dfrac{473}{8}$.

b) $x_1^4 + x_2^4 = [(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2]^2 - 2x_1^2x_2^2 = \dfrac{3409}{16}$.

c) $x_1^4 - x_2^4 = (x_1 - x_2)(x_1 + x_2)[(x_1 + x_2)^2 - 2\,x_1x_2]$.

Ta có :

$$(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4\,x_1.x_2 \Rightarrow |x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{17}}{2}$$

Giả sử $x_1 < x_2$, ta có

$$x_1 - x_2 = -\frac{\sqrt{17}}{2}. \text{ Do đó } x_1{}^4 - x_2{}^4 = -\frac{759}{16}\sqrt{17}$$

Đối với trường hợp $x_1 > x_2$, ta có $x_1^4 - x_2^4 = \dfrac{759}{16}\sqrt{17}$

d) $-\dfrac{269}{26}$.

*Gợi ý.* $\dfrac{x_1}{x_2}\left(1 - x_2^2\right) + \dfrac{x_2}{x_1}\left(1 - x_1^2\right) = \dfrac{x_1}{x_2} + \dfrac{x_2}{x_1} - 2x_1x_2 = \dfrac{x_1^2 + x_2^2}{x_1x_2} - 2x_1x_2$.

**3.19.** $m = \pm\sqrt{2 + \sqrt{5}}$ *Gợi ý.* Điều kiện để phương trình có nghiệm là :

$$\Delta' = m^2 - 4 \geq 0 \Leftrightarrow |m| \geq 2.$$

Theo định lí Vi-ét, ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = -2m \\ x_1x_2 = 4 \end{cases}$

nên $\left(\dfrac{x_1}{x_2}\right)^2 + \left(\dfrac{x_2}{x_1}\right)^2 = \dfrac{x_1^4 + x_2^4}{x_1^2x_2^2} = \dfrac{\left[(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2\right]^2}{x_1^2x_2^2} - 2$.

$$= \frac{(4m^2 - 8)^2}{16} - 2.$$

Ta có $\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2+\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2=3 \Leftrightarrow (4m^2-8)^2=80 \Leftrightarrow (m^2-2)^2=5 \Leftrightarrow m^2=2+\sqrt{5}$

$\Rightarrow m=\pm\sqrt{2+\sqrt{5}}$ Các giá trị này đều thoả mãn điều kiện $|m| \geq 2$.

**3.20.** $a \in \{-3;9\}$ *Gợi ý*. Điều kiện để phương trình có nghiệm là

$$\Delta=(a+1)^2-8(a+3) \geq 0 \Leftrightarrow a^2-6a-23 \geq 0. \qquad (*)$$

Gọi hai nghiệm của phương trình đã cho là $x_1$, $x_2$ (giả sử $x_2 > x_1$)

Theo định lí Vi-ét ta có $\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{a+1}{2} \\ x_1x_2=\dfrac{a+3}{2}. \end{cases}$

Do $x_2-x_1=1$ nên $(x_2-x_1)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=1$, suy ra

$\frac{(a+1)^2}{4}-2(a+3)=1 \Leftrightarrow a^2-6a-27=0 \Leftrightarrow a=9$ hoặc $a=-3$

Rõ ràng cả hai giá trị này đều thoả mãn (*) vì $a^2-6a-23=4>0$.

**3.21.** a) $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1.x_2=\frac{b^2}{a^2}-2\frac{c}{a}=\frac{b^2-2ac}{a^2}$

b) $x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2)=\frac{3abc-b^3}{a^3}$.

c) $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=-\frac{b}{c}$

d) $x_1^2-4x_1x_2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-6x_1.x_2=\frac{b^2}{a^2}-\frac{6c}{a}=\frac{b^2-6ac}{a^2}$

**3.22.** $k=3$. *Gợi ý*. Gọi $x_1$, $x_2$ là hai nghiệm của phương trình .

Áp dụng định lí Vi-ét và theo yêu cầu bài toán ta có $x_2=-\frac{1}{x_1}$ và

$$\begin{cases} x_1+x_2=x_1-\dfrac{1}{x_1}=\dfrac{k+2}{2} \\ x_1x_2=x_1\left(\dfrac{-1}{x_1}\right)=-1=\dfrac{7-k^2}{2}. \end{cases}$$

Từ $\dfrac{7-k^2}{2} = -1$ ta có $k^2 = 9$, do $k > 0$ nên $k = 3$.

Với $k = 3$ nghiệm của phương trình là $x_1 = \dfrac{5-\sqrt{41}}{4}$, $x_2 = \dfrac{5+\sqrt{41}}{4}$

**3.23.** Gọi $x_1$, $x_2$ là hai nghiệm của phương trình : $(k+2)x^2 - 2kx - k = 0$ thoả mãn yêu cầu bài toán. Khi đó $\dfrac{x_1+x_2}{2} = 1$ nên $x_1 + x_2 = 2$ Ngoài ra $x_1 + x_2 = \dfrac{2k}{k+2}$ nên $\dfrac{2k}{k+2} = 2$, do đó $k = k + 2$.

Suy ra không tồn tại $k$ thoả mãn bài toán.

**3.24.** Gọi $x_1$, $x_2$ là hai nghiệm của phương trình sao cho $x_1 > x_2$

Khi đó, do $a > b > 0$ nên

$$x_1 - x_2 = \sqrt{(x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{a+b}{ab}\right)^2 - \frac{4}{ab}} = \sqrt{\left(\frac{a-b}{ab}\right)^2} = \frac{a-b}{ab}.$$

$$x_1 + x_2 = \frac{a+b}{ab}$$

Suy ra tỉ số giữa tổng và hiệu hai nghiệm bằng $\dfrac{a+b}{a-b}$

**3.25.** a) $x = \pm 1$, $x = \pm 2$ ; b) $x = \pm 2$, $x = \pm 3$ ; c) $x = \pm 3$ ; d) $x = \pm 5$.

**3.26.** Đặt $y = x^2$, ta có phương trình bậc hai

$$ay^2 + by + c = 0. \qquad (1)$$

a) Phương trình trùng phương đã cho vô nghiệm nếu và chỉ nếu

- Phương trình (1) vô nghiệm, tức là $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, hoặc
- Phương trình (1) chỉ có nghiệm âm, tức là $\Delta \geq 0$, $ac > 0$ và $ab > 0$ $\left(\dfrac{c}{a} > 0 \text{ và } -\dfrac{b}{a} < 0\right)$.

b) Phương trình trùng phương đã cho có một nghiệm nếu và chỉ nếu phương trình (1) có một nghiệm $y = 0$, nghiệm kia không dương, tức là $c = 0$ và $ab \geq 0$.

c) Phương trình trùng phương đã cho có hai nghiệm nếu và chỉ nếu

- Phương trình (1) có một nghiệm kép dương, tức là $\Delta = 0$ và $ab < 0$, hoặc
- Phương trình (1) có hai nghiệm trái dấu, tức là $ac < 0$.

d) Phương trình trùng phương đã cho có ba nghiệm nếu và chỉ nếu phương trình (1) có một nghiệm $y = 0$ và nghiệm kia dương, tức là $c = 0$ và $ab < 0$.

e) Phương trình trùng phương đã cho có bốn nghiệm nếu và chỉ nếu phương trình (1) có hai nghiệm dương, tức là $\Delta > 0$, $ac > 0$ và $ab < 0$.

**3.27.** a) Điều kiện : $x \neq 1$, đưa phương trình về dạng $ax = 3 + a$ (1)

– Nếu $a = 0$ thì (1) vô nghiệm nên phương trình đã cho vô nghiệm.

– Nếu $a \neq 0$ thì (1) $\Leftrightarrow x = \dfrac{3+a}{a}$.

Nhận thấy $\dfrac{3+a}{a} \neq 1$. Vậy $x = \dfrac{3+a}{a}$ là nghiệm của phương trình đã cho.

b) Điều kiện : $x \neq 2$, đưa phương trình về dạng

$$(a-3)x = 4a - 7. \qquad (2)$$

– Nếu $a = 3$ thì (2) có dạng $0x = 5$ nên phương trình vô nghiệm

– Nếu $a \neq 3$ thì (1) $\Leftrightarrow x = \dfrac{4a-7}{a-3}$ Xét điều kiện $x \neq 2$, ta có

$$\frac{4a-7}{a-3} \neq 2 \Leftrightarrow 4a - 7 \neq 2a - 6 \Leftrightarrow a \neq \frac{1}{2}$$

Do đó, nếu $a = \dfrac{1}{2}$ thì $x = \dfrac{4a-7}{a-3}$ bị loại.

*Kết luận.* Với $a = 3$ hoặc $a = \dfrac{1}{2}$, phương trình vô nghiệm.

Với $a \neq 3$ và $a \neq \dfrac{1}{2}$, phương trình có nghiệm $x = \dfrac{4a-7}{a-3}$

c) Với $a = 0$, phương trình vô nghiệm.

Với $a \neq 0$, phương trình có nghiệm $x = \dfrac{a-6}{2a}$.

**3.28.** a) $x = 1\dfrac{1}{7}$.

b) $\sqrt{(x+3)^2} = |2x-1| \Leftrightarrow |x+3| = |2x-1|$

$\Leftrightarrow x + 3 = 2x - 1$ hoặc $x + 3 = 1 - 2x$ $\Leftrightarrow x = 4$ hoặc $x = -\frac{2}{3}$.

c) Biến đổi phương trình về dạng $x(x-1) = 0$, do đó $x = 0$ hoặc $x = 1$.

d) Điều kiện : $x \neq \pm 1$, $x \neq 14$, $x \neq 0$. Ta có :

$$\frac{(1+x)^2 - (1-x)^2}{1-x^2} \cdot \frac{1-x}{2x} = \frac{3}{14-x} \Leftrightarrow \frac{2}{1+x} = \frac{3}{14-x}$$

$\Leftrightarrow 5x = 25 \Leftrightarrow x = 5$ (thoả mãn điều kiện).

**3.29.** a) $x = 2 \pm \sqrt{6}$ ; b) $x \in \left\{5; -\frac{5}{4}\right\}$ ; c) $x \in \left\{2; \frac{1}{4}\right\}$

**3.30.** a) Nhận thấy $x = 0$ không phải là nghiệm, nên phương trình đã cho tương đương với phương trình :

$$\frac{4}{x + \frac{3}{x} + 1} + \frac{5}{x + \frac{3}{x} - 5} = -\frac{3}{2}.$$

Đặt $y = x + \frac{3}{x}$ ta nhận được phương trình

$$\frac{4}{y+1} + \frac{5}{y-5} = -\frac{3}{2}. \qquad (*)$$

Biến đổi phương trình (*) thành $\frac{y^2 + 2y - 15}{(y+1)(y-5)} = 0$. Phương trình này có hai nghiệm $y_1 = -5$, $y_2 = 3$. Từ đó dẫn đến hai trường hợp sau :

- $x + \frac{3}{x} = -5 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 5x + 3 = 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{13}}{2}$.
- $x + \frac{3}{x} = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x + 3 = 0 \\ x \neq 0 \end{cases}$ phương trình vô nghiệm.

*Kết luận*. Phương trình có nghiệm $x = \frac{-5 \pm \sqrt{13}}{2}$

b) $x \in \left\{-4; -\frac{1}{2}\right\}$.

**3.31.** a) Với $m \neq 0$, phương trình có hai nghiệm $x = \frac{-4}{3m}$ và $x = \frac{2}{m}$.

Với $m = 0$, phương trình vô nghiệm.

b) Với $m = 0$, tập nghiệm $S = \{0\}$.

với $m \neq 0$, tập nghiệm $S = \left\{-3m\,;\frac{m}{5}\right\}$.

**3.32.** a) Với $m = 1$ hoặc $m = \frac{5}{2}$, tập nghiệm $S = \{2\}$.

Với $m \neq 1$ và $m \neq \frac{5}{2}$, tập nghiệm $S = \left\{2\,;\frac{3}{m-1}\right\}$.

b) Điều kiện là $x \neq 3m$. Khi đó ta có

$$(x+1)(mx+2) = 0 \Leftrightarrow x + 1 = 0 \text{ hoặc } mx + 2 = 0.$$

i) $x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$. Xét điều kiện $x \neq 3m$, ta có :

$3m = -1 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{3}$. Do đó nếu $m = -\frac{1}{3}$ thì $x = -1$, bị loại.

ii) $mx + 2 = 0 \Leftrightarrow mx = -2$. (1)

– Nếu $m = 0$ thì $0x = -2$ (vô lí), phương trình này vô nghiệm.

– Nếu $m \neq 0$ thì (1) có nghiệm $x = -\frac{2}{m}$.

Nhận thấy $-\frac{2}{m} \neq 3m$ với mọi $m$ nên $x = -\frac{2}{m}$ là nghiệm của phương trình đã cho. Lại có $-\frac{2}{m} = -1 \Leftrightarrow m = 2$. Từ đó ta có kết luận sau :

*Kết luận*

Với $m \neq 0$, $m \neq 2$ và $m \neq -\frac{1}{3}$, tập nghiệm là $S = \left\{-\frac{2}{m}\,;-1\right\}$.

Với $m = 0$ hoặc $m = 2$, tập nghiệm là $S = \{-1\}$.

Với $m = -\frac{1}{3}$, tập nghiệm là $S = \{6\}$.

c) Với $m \neq \frac{1}{2}$ và $m \neq 0$, tập nghiệm $S = \left\{\frac{1+2m}{2m-1}\right\}$ ; Với $m = \frac{1}{2}$ hoặc $m = 0$, tập nghiệm $S = \varnothing$.

*Gợi ý*. Điều kiện là $x \neq \pm 1$. Đưa phương trình về dạng $(2m-1)x = 1 + 2m$.

**3.33.** Đặt $PQ = MN = x$ $(0 < x < a)$

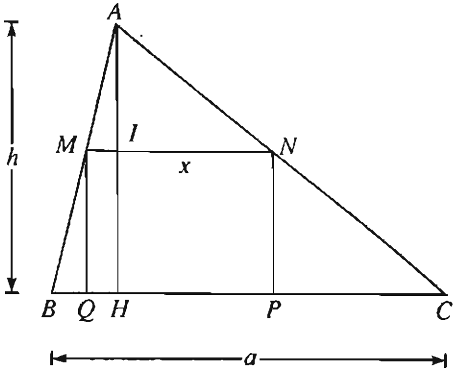
Theo định lí Ta-lét ta có (h. 3.1)

$$\frac{MN}{BC} = \frac{AI}{AH}\left(= \frac{AN}{AC}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{x}{a} = \frac{h - IH}{h} \Rightarrow IH = \frac{(a-x)h}{a}.$$

Điều kiện $MN + IH = p$ cho ta phương trình $x + \dfrac{(a-x)h}{a} = p$ hay

$(a-h)x = a(p-h)$. (1)



*Hình 3.1*

– Nếu $a = h$ thì phương trình (1) vô nghiệm khi $p \neq h$, nghiệm đúng với mọi $x$ khi $p = h$. Điều này có nghĩa là :

+ Khi tam giác nhọn $ABC$ có $AH = BC$ và $p \neq AH$ thì không có hình chữ nhật nào thoả mãn điều kiện của bài toán.

+ Khi tam giác nhọn $ABC$ có $AH = BC$ và $p = AH$ thì có vô số hình chữ nhật thoả mãn điều kiện bài toán với cạnh $x$ ($0 < x < a$ tuỳ ý).

– Nếu $a \neq h$ thì phương trình (1) có nghiệm duy nhất $x = \dfrac{a(p-h)}{a-h}$

Xét điều kiện $0 < x < a$ hay

$$0 < \frac{a(p-h)}{a-h} < a. \qquad (2)$$

Vì $a \neq h$ nên có hai trường hợp :

+ Nếu $a > h$, ta có (2) $\Leftrightarrow 0 < p - h < a - h \Leftrightarrow h < p < a$.

+ Nếu $a < h$, ta có (2) $\Leftrightarrow 0 > p - h > a - h \Leftrightarrow a < p < h$.

Điều này có nghĩa là, giá trị $x = \dfrac{a(p-h)}{a-h}$ là nghiệm của bài toán khi và chỉ khi $p$ nằm giữa $a$ và $h$.

**3.34.** a) $a^2 + b^2 \neq 0,\ c = 0$ ;

b) $b = 0,\ a \neq 0$ ; $c \neq 0$ ;

c) $a = 0,\ c \neq 0,\ b \neq 0$ ;

d) $a \neq 0, \quad b = c = 0$ ;

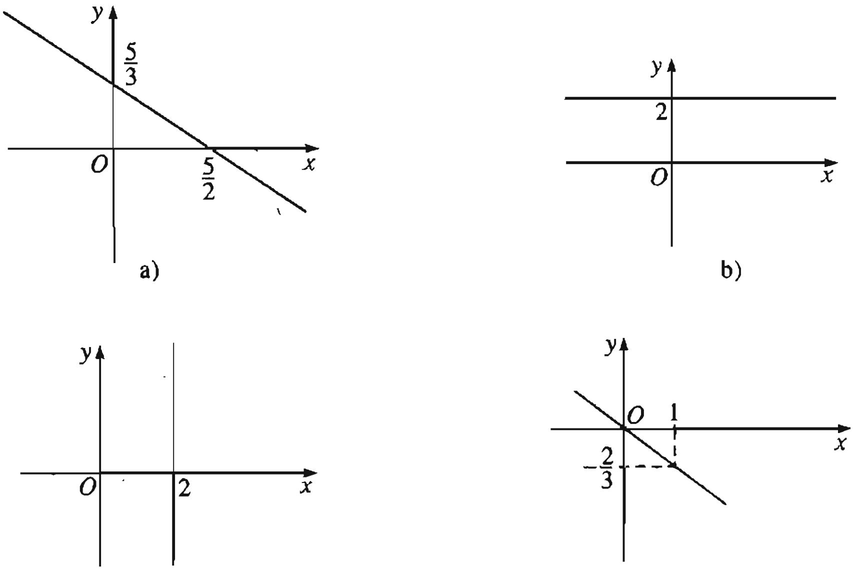
e) $a = c = 0, \quad b \neq 0$ ;

g) $a \neq 0, \quad b \neq 0,\ c \neq 0$.

**3.35.** a) $\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = \dfrac{5-2x}{3} \end{cases}$ ;   b) $\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = 2 \end{cases}$ ;

c) $\begin{cases} x = 2 \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$ ;   d) $\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = \dfrac{-2}{3}x. \end{cases}$

Minh hoạ tập nghiệm bằng hình 3.2 a, b, c, d.



a) b) c) d)

*Hình 3.2*

**3.36.** a) Nếu $m = 0$ thì phương trình có vô số nghiệm $\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = -5. \end{cases}$

Nếu $m = 1$ thì phương trình có vô số nghiệm $\begin{cases} x = 5 \\ y \in \mathbb{R}. \end{cases}$

Nếu $m \neq 0$ và $m \neq 1$thì phương trình có vô số nghiệm $\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = \dfrac{5 - mx}{m-1} \end{cases}$

b) Phương trình vô nghiệm nếu $m = 0$ ; có vô số nghiệm $\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = \dfrac{m + 1 - mx}{m}. \end{cases}$

nếu $m \neq 0$.

**3.37.** a) Ta có :

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = -19 \; ; \; D_x = \begin{vmatrix} -7 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 19 \; ; \; D_y = \begin{vmatrix} 3 & -7 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 38.$$

Do đó $x = \dfrac{D_x}{D} = -1$ ; $y = \dfrac{D_y}{D} = \dfrac{38}{-19} = -2$.

Hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x\,;\,y) = (-1\,;\,-2)$.

b) Hệ vô nghiệm.

**3.38.** a) $\begin{cases} x = 1 \\ y \approx 0{,}47\,; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x \approx 0{,}24 \\ y \approx 1{,}23. \end{cases}$ (sử dụng máy tính bỏ túi).

**3.39.** a) Ta có $D = (a+1)(a-2)$ ; $D_x = -(a+1)$ ; $D_y = (a-1)(a+1)$.

- Với $a \neq -1$ và $a \neq 2$ thì $D \neq 0$, hệ có nghiệm duy nhất $\begin{cases} x = \dfrac{-1}{a-2} \\ y = \dfrac{a-1}{a-2}\,; \end{cases}$

- Với $a = -1$, hệ đã cho tương đương với phương trình $-x + 2y = 1$ nên có vô số nghiệm $\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = \dfrac{1+x}{2} \end{cases}$

- Với $a = 2$, hệ trở thành $\begin{cases} 2x + 2y = 1 \\ x + y = 2 \end{cases}$ nên vô nghiệm.

b) Với $a \neq 0$ và $a \neq \dfrac{1}{2}$, hệ có nghiệm duy nhất $\begin{cases} x = \dfrac{7}{2a-1} \\ y = \dfrac{-3}{2a-1}\,; \end{cases}$

Với $a = 0$, hệ có vô số nghiệm $\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = \dfrac{-1-x}{2}\,; \end{cases}$

Với $a = \dfrac{1}{2}$, hệ vô nghiệm.

c) Với $a \neq 0$ ; $a \neq 2$, hệ có nghiệm duy nhất $\begin{cases} x = \dfrac{9}{2a} \\ y = \dfrac{a-3}{2a}\,; \end{cases}$

Với $a = 0$, hệ vô nghiệm.

Với $a = 2$, hệ vô số nghiệm $\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = 2 - x. \end{cases}$

d) Điều kiện : $x \neq y$. Biến đổi hệ phương trình về dạng :

$$\text{(I)} \begin{cases} (3-a)x + (3+a)y = 0 \\ 3x - 2y = a. \end{cases}$$

Ta có $D = -a - 15$ ; $D_x = -a(3+a)$ ; $D_y = a(3-a)$

• Với $a \neq -15$ thì $D \neq 0$, hệ (I) có nghiệm duy nhất $\begin{cases} x = \dfrac{a(3+a)}{a+15} \\ y = \dfrac{a(a-3)}{a+15} \end{cases}$;

Nhận thấy rằng $\dfrac{a(3+a)}{a+15} = \dfrac{a(a-3)}{a+15} \Leftrightarrow a = 0$,

nên khi $a \neq 0$ thì $x \neq y$, khi đó nghiệm của (I) cũng là nghiệm của hệ đã cho.

• Với $a = -15$ thì $D = 0$, $D_x \neq 0$, $D_y \neq 0$, hệ (I) vô nghiệm nên hệ đã cho vô nghiệm.

*Kết luận.* Với $a \neq 0$ và $a \neq -15$, hệ có nghiệm duy nhất :

$$(x ; y) = \left( \frac{a(3+a)}{a+15} ; \frac{a(a-3)}{a+15} \right).$$

Với $a = 0$ hoặc $a = -15$, hệ vô nghiệm.

**3.40.** a) $\begin{cases} 3|x| + 5y - 9 = 0 & (1) \\ 2x - |y| = 7. & (2) \end{cases}$

Từ (2) suy ra $2x = 7 + |y|$, nên phải có $x > 0$.

Nếu $y \geq 0$, hệ có dạng $\begin{cases} 3x + 5y = 9 \\ 2x - y = 7 \end{cases}$ Khi đó $\begin{cases} x = \dfrac{44}{13} \\ y = -\dfrac{3}{13}. \end{cases}$ (loại)

Nếu $y < 0$, hệ có dạng $\begin{cases} 3x + 5y = 9 \\ 2x + y = 7 \end{cases}$ Khi đó $\begin{cases} x = \dfrac{26}{7} \\ y = \dfrac{-3}{7}. \end{cases}$ (thoả mãn)

Hệ có nghiệm duy nhất $(x ; y) = \left(\dfrac{26}{7} ; \dfrac{-3}{7}\right)$.

b) $|x| = a + 1$

Nếu $a > -1$ thì $x = \pm (a + 1)$, hệ có hai nghiệm là $(a + 1 ; 2a + 7)$ và $(-a - 1 ; 3 - 2a)$.

Nếu $a = -1$ thì $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$, hệ có nghiệm là $(x ; y) = (0 ; 5)$.

Nếu $a < -1$ thì $|x| = a + 1 < 0$, hệ vô nghiệm.

**3.41.** Đặt $\dfrac{1}{x} = u$ ; $\dfrac{1}{y} = v$, hệ đã cho trở thành $\begin{cases} 6u + 5v = 3 \\ 9u - 10v = 1 \end{cases}$

hệ này có nghiệm duy nhất $(u ; v) = \left(\dfrac{1}{3} ; \dfrac{1}{5}\right)$.

Từ đó nghiệm của hệ phương trình đã cho : $(x ; y) = (3 ; 5)$.

b) $(x ; y) = \left(\dfrac{3}{70} ; \dfrac{-87}{140}\right)$. *Gợi ý*. Đặt $\dfrac{1}{x - 2y} = u$ ; $\dfrac{1}{x + 2y} = v$.

**3.42.** Gọi vận tốc dòng nước là $x$ (km/h), vận tốc của canô là $y$ (km/h). (Điều kiện $y > x > 0$).

Khi đó, vận tốc ca nô đi xuôi dòng là $(y + x)$, vận tốc ca nô đi ngược dòng là $(y - x)$.

Ta có hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{135}{x + y} + \dfrac{63}{y - x} = 8 \\ \dfrac{108}{x + y} + \dfrac{84}{y - x} = 8. \end{cases}$

Giải hệ tìm được $x = 3$ ; $y = 24$.

*Trả lời*. Vận tốc thật của ca nô là 24 km/h ;

Vận tốc dòng nước là 3 km/h.

**3.43.** Xét hệ phương trình $\begin{cases}(m-1)x+y=5\\2x+my=10.\end{cases}$

Ta có $D=(m+1)(m-2)$, $D_x=5(m-2)$ ; $D_y=10(m-2)$.

a) $(d_1)$ và $(d_2)$ cắt nhau $\Leftrightarrow D\neq 0 \Leftrightarrow m\neq -1$ và $m\neq 2$.

b) $(d_1) \mathbin{//} (d_2) \Leftrightarrow D=0$ và $D_x\neq 0$ (hoặc $D_y\neq 0$) $\Leftrightarrow m=-1$.

c) $(d_1)$ và $(d_2)$ trùng nhau $\Leftrightarrow D=D_x=D_y=0 \Leftrightarrow m=2$.

**3.44.** a) $(d_1)$, $(d_2)$ và $(d_3)$ đồng quy khi và chỉ khi hệ phương trình :

$$\begin{cases}2x+3y=-4 & (1)\\3x+y=1 & (2)\\2mx+5y=m & (3)\end{cases}$$

có nghiệm duy nhất. Giải hệ phương trình gồm (1) và (2) tìm được $x=1$ ; $y=-2$. Thay vào (3) tìm được $m=10$.

b) $(d_2)\perp(d_3) \Leftrightarrow (-3).\dfrac{-2m}{5}=-1 \Leftrightarrow m=\dfrac{-5}{6}$

**3.45.** a) $2x-5y=10$ ;

b) $y=3x-4$.

**3.46.** a) $(x\,;\,y\,;\,z)=(12\,;\,13\,;\,17)$. *Gợi ý.* Cộng vế với vế của ba phương trình trong hệ, dẫn đến

$$x+y+z=42.$$

Từ đó dễ dàng suy ra $x=12$ ; $y=13$ ; $z=17$.

b) $(x\,;\,y\,;\,z)=(-1\,;\,2\,;\frac{2}{3})$. *Gợi ý.*

$$\begin{cases}2x+y+3z=2\\-x+4y-6z=5\\5x-y+3z=-5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-x+4y-6z=5\\-3x+2y=7\\8y=16\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}z=\dfrac{2}{3}\\x=-1\\y=2.\end{cases}$$

**3.47.** Sử dụng máy tính bỏ túi :

a) $\begin{cases}x\approx -0{,}42\\y\approx 2{,}91\\z\approx -1{,}45\,;\end{cases}$ b) $\begin{cases}x\approx -1{,}18\\y\approx 1{,}62\\z\approx 0{,}14.\end{cases}$

**3.48.** Gọi số học sinh của lớp 10A, 10B, 10C lần lượt là $x$, $y$, $z$.

(Điều kiện : $x$, $y$, $z$ nguyên dương)

Theo đề bài, ta lập được hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y + z = 128 & (1) \\ 3x + 2y + 6z = 476 & (2) \\ 4x + 5y = 375. & (3) \end{cases}$$

Dùng phương pháp khử dần ẩn số : nhân hai vế của (1) với – 6 rồi cộng vào phương trình (2), ta được hệ phương trình :

$$\begin{cases} x + y + z = 128 \\ 3x + 4y = 292 \\ 4x + 5y = 375. \end{cases}$$

Từ hai phương trình cuối tìm được $x = 40$ ; $y = 43$. Từ đó thế vào phương trình đầu tìm được $z = 45$, (thoả mãn điều kiện bài toán).

Vậy lớp 10*A* có 40 em, lớp 10*B* có 43 em, lớp 10*C* có 45 em.

**3.49.** Gọi số cam, quýt, thanh yên lần lượt là $x$, $y$, $z$ quả.

(Điều kiện : $x$, $y$, $z$ nguyên dương nhỏ hơn 100).

Theo đề bài, ta lập được hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y + z = 100 & (1) \\ 3x + \dfrac{y}{5} + 5z = 60. & (2) \end{cases}$$

Từ (1) và (2) suy ra $7x + 12z = 100 \Leftrightarrow 7(x - 16) = -12(z + 1)$.

Vì vậy $\begin{cases} x - 16 = -12k \\ z + 1 = 7k \end{cases} (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -12k + 16 \\ z = 7k - 1. \end{cases}$

Để $x$, $y$ nguyên dương thì $k = 1$. Từ đó tìm được $x = 4$ ; $y = 90$ ; $z = 6$ (thoả mãn điều kiện bài toán).

Vậy có 4 quả cam, 90 quả quýt và 6 quả thanh yên.

**3.50.** a) Thế $y = 2x - 7$ vào phương trình thứ hai dẫn đến phương trình bậc hai của $x$. Từ đó hệ có nghiệm là $\left(\dfrac{13}{3} ; \dfrac{5}{3}\right)$ và $(3 ; -1)$.

b) Tương tự, thế $y = \dfrac{6 - 4x}{9}$. Hệ có nghiệm là $(-3 ; 2)$ và $\left(-2 ; \dfrac{14}{9}\right)$.

c) Nhân phương trình thứ nhất với 2 rồi trừ vào phương trình thứ hai ta được $3x^2 - 10x - 8 = 0$. Từ đó hệ có nghiệm $(4 ;\ -37)$ và $\left(-\frac{2}{3} ; -\frac{11}{9}\right)$.

**3.51.** a) Hệ đã cho tương đương với

$$\begin{cases} x + y + 2 = 0 \\ 3x^2 - 32y^2 + 5 = 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} 2x + 2y - 1 = 0 \\ 3x^2 - 32y^2 + 5 = 0. \end{cases}$$

Từ đó giải tương tự như bài 3.50 ta được nghiệm là $(-3 ; 1)$, $\left(-\frac{41}{29} ; -\frac{17}{29}\right)$, $\left(1 ; -\frac{1}{2}\right)$ và $\left(\frac{3}{29} ; \frac{23}{58}\right)$.

b) $(-3 + 2\sqrt{2} ; 1 - \sqrt{2})$, $(-3 - 2\sqrt{2} ; 1 + \sqrt{2})$, $\left(-3 + \sqrt{5} ; \frac{(1 - \sqrt{5})}{2}\right)$, $\left(-3 - \sqrt{5} ; \frac{(1 + \sqrt{5})}{2}\right)$.

*Gợi ý*. Hệ đã cho tương đương với

$$\begin{cases} x + 2y + 1 = 0 \\ xy + x^2 + 3y + 1 = 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x + 2y + 2 = 0 \\ xy + x^2 + 3y + 1 = 0. \end{cases}$$

**3.52.** a) $(1 ; 2)$ và $(2 ; 1)$.

b) $(-5 - \sqrt{55} ; -5 + \sqrt{55})$ và $(-5 + \sqrt{55} ; -5 - \sqrt{55})$.

c) $(6 ; 9)$ và $(9 ; 6)$.

*Gợi ý*. Ta tìm được $x + y = 15$, $xy = 54$ hoặc $x + y = -16$, $xy = 85$.

**3.53.** a) $(1 ;\ -1)$ và $(-1 ;\ -1)$. *Gợi ý*. Ta có $xy + x^2 = 2(2x^2 - y^2)$. Suy ra $(x - y)(3x + 2y) = 0$.

b) $(-3 ; -2)$ và $(3 ; 2)$. *Gợi ý*. Từ phương trình thứ nhất suy ra $x + y = 5$ hoặc $x + y = -5$.

c) $(3\sqrt{2} ; \sqrt{2})$, $(3\sqrt{2} ; -\sqrt{2})$, $(-3\sqrt{2} ; -\sqrt{2})$ và $(-3\sqrt{2} ; \sqrt{2})$.

*Gợi ý*. Từ phương trình thứ nhất rút ra $x = 3y$ hoặc $x = -3y$.

**3.54.** Phương trình dạng $ax + b = 0$ vô nghiệm khi $a = 0$ và $b \neq 0$, có vô số nghiệm khi $a = b = 0$.

*Áp dụng.* Đối với phương trình $m(m-2)x = m$, ta có :

a) Phương trình có nghiệm duy nhất nếu $m(m-2) \neq 0$ ;

b) Phương trình vô nghiệm nếu $m = 2$ ;

c) Phương trình có vô số nghiệm nếu $m = 0$ ;

d) Phương trình có nghiệm nếu $m - 2 \neq 0$ (tức là $m \neq 2$).

**3.55.** Xét hệ phương trình (I) $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ (ẩn là $x$ và $y$) với điều kiện $a'b'c' \neq 0$.

a) Nếu $\dfrac{a}{a'} \neq \dfrac{b}{b'}$ thì $D = ab' - a'b \neq 0$ nên hệ (I) có nghiệm duy nhất.

b) Nếu $\dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} \neq \dfrac{c}{c'}$ thì $D = ab' - a'b = 0$ và $D_x = cb' - c'b \neq 0$ nên hệ (I) vô nghiệm.

c) Nếu $\dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} = \dfrac{c}{c'}$ thì $D = 0$ và $D_x = cb' - c'b = D_y = ac' - a'c = 0$ nên hệ (I) có vô số nghiệm.

*Chú ý.* Kết quả trên vẫn đúng khi $a = b = 0$.

*Áp dụng.* Đối với hệ phương trình $\begin{cases} (a+1)x + 3y = a \\ x + (a-1)y = 2 \end{cases}$, ta có :

– Nếu $a = 1$ thì dễ thấy hệ có nghiệm duy nhất.

– Nếu $a \neq 1$ thì hệ có vô số nghiệm khi $\dfrac{a+1}{1} = \dfrac{3}{a-1} = \dfrac{a}{2}$. Giải ra ta được $a = -2$.

**3.56.** a) $x = \dfrac{m+2}{2m^2+3}$ *Gợi ý.* $(2m^2 - 1)x - 2 = m - 4x \Leftrightarrow (2m^2 + 3)x = m + 2$.

b) $m^2(x-1) + 1 = -(4m+3)x \Leftrightarrow (m+1)(m+3)x = m^2 - 1$.

- Nếu $m \neq -1$ và $m \neq -3$ thì phương trình có nghiệm duy nhất

$$x = \frac{m-1}{m+3}.$$

- Nếu $m = -1$ thì phương trình nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.

- Nếu $m = -3$ thì phương trình vô nghiệm.

c) $m(x+1) = m^2 - 6 - 2x \Leftrightarrow (m+2)x = (m+2)(m-3)$.

- Nếu $m = -2$ thì phương trình nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.
- Nếu $m \neq -2$ thì phương trình có nghiệm duy nhất $x = m - 3$.

**3.57.** a) Với điều kiện $x \neq 2$, phương trình đã cho tương đương với phương trình

$$(m-2)x = -2(m+2). \qquad (1)$$

Nếu $m = 2$ thì (1) vô nghiệm nên phương trình đã cho vô nghiệm.

Nếu $m \neq 2$ thì (1) có nghiệm duy nhất $x = \frac{-2(m+2)}{m-2}$. Để là nghiệm của phương trình đã cho, giá trị này phải thoả mãn điều kiện $x \neq 2$, tức là :

$$\frac{-2(m+2)}{m-2} \neq 2.$$

Điều đó xảy ra khi và chỉ khi $m \neq 0$. Vậy, ta có kết luận :

- Nếu $m = 2$ hoặc $m = 0$ thì phương trình đã cho vô nghiệm.
- Nếu $m \neq 2$ và $m \neq 0$ thì phương trình đã cho có nghiệm $x = \frac{-2(m+2)}{m-2}$.

b) Điều kiện là $x \neq -\frac{1}{2}$

- Nếu $m \neq -2$, $m \neq 1$ và $m \neq 3$ thì phương trình có nghiệm $x = \frac{1}{m-3}$
- Nếu $m = -2$ thì phương trình nghiệm đúng với mọi $x \neq -\frac{1}{2}$.
- Nếu $m = 1$ hoặc $m = 3$ thì phương trình vô nghiệm.

**3.58.** a) Vô nghiệm ; b) $(x ; y ; z) = (5 ; 11 ; 17)$.

c) $(-1-\sqrt{2} ; -1-2\sqrt{2})$ và $(-1+\sqrt{2} ; -1+2\sqrt{2})$.

*Gợi ý*. Do $|x-y| = \sqrt{2} \Leftrightarrow x - y = \pm\sqrt{2}$ nên tập nghiệm của hệ phương trình đã cho bằng hợp các tập nghiệm của hai hệ phương trình

$$\begin{cases} x - y = \sqrt{2} \\ 2x - y = -1 \end{cases} \text{ và } \begin{cases} x - y = -\sqrt{2} \\ 2x - y = -1. \end{cases}$$

**3.59.** a) Ta có :

$$D = \begin{vmatrix} m-1 & m+1 \\ 3-m & 3 \end{vmatrix} = (m-2)(m+3) ;$$

$$D_x = \begin{vmatrix} m & m+1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = m-2 ; \qquad D_y = \begin{vmatrix} m-1 & m \\ 3-m & 2 \end{vmatrix} = (m-2)(m+1).$$

Từ đó suy ra hệ có nghiệm trong hai trường hợp sau :

- D ≠ 0, tức là $m \neq 2$ và $m \neq -3$. Lúc này, nghiệm duy nhất của hệ là

$$(x ; y) = \left(\frac{1}{m+3} ; \frac{m+1}{m+3}\right). \qquad (1)$$

- $D = D_x = D_y = 0$, tức là $m = 2$. Lúc này hệ có vô số nghiệm $(x ; y)$, trong đó

$$x = 2 - 3y, \text{ và } y \in \mathbb{R} \text{ (tuỳ ý)}.$$

b) Khi $m = \sqrt{5} - 2$, hệ phương trình có một nghiệm duy nhất tính theo (1). Vậy

$$x = \frac{1}{\sqrt{5}+1} \approx 0{,}309,$$

$$y = \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1} \approx 0{,}382.$$

**3.60.** a) Để giải phương trình $|2x + m| = |2x + 2m - 1|$, ta giải hai phương trình sau :

$$2x + m = 2x + 2m - 1 \qquad (1)$$

$$2x + m = -(2x + 2m - 1). \qquad (2)$$

- (1) $\Leftrightarrow 0x = m - 1$.

Phương trình này vô nghiệm nếu $m \neq 1$ và nghiệm đúng với mọi $x$ nếu $m = 1$.

- (2) $\Leftrightarrow 4x = -3m + 1 \Leftrightarrow x = \frac{-3m+1}{4}$.

*Kết luận*

– Nếu $m \neq 1$ thì phương trình đã cho có một nghiệm $x = \frac{-3m+1}{4}$.

- Nếu $m = 1$ thì phương trình đã cho nghiệm đúng với mọi $x$.

*Chú ý*. Cũng có thể giải phương trình này bằng cách bình phương hai vế :

$$|2x+m| = |2x+2m-1| \Leftrightarrow (2x+m)^2 = (2x+2m-1)^2$$
$$\Leftrightarrow 4(1-m)x = (m-1)(3m-1).$$

b) Việc giải phương trình $|mx+1| = |2x-m-3|$ quy về giải hai phương trình $(m-2)x = -(m+4)$ và $(m+2)x = m+2$.

*Kết luận*

– Nếu $m \neq \pm 2$ thì phương trình có hai nghiệm $x = \dfrac{m+4}{2-m}$ và $x = 1$.

– Nếu $m = -2$ thì phương trình nghiệm đúng với mọi $x$.

– Nếu $m = 2$ thì phương trình có một nghiệm $x = 1$.

*Chú ý*. Cũng có thể giải phương trình này bằng cách bình phương hai vế :

$$|mx+1| = |2x-m-3| \Leftrightarrow (mx+1)^2 = (2x-m-3)^2$$
$$\Leftrightarrow \quad (mx+1+2x-m-3)(mx+1-2x+m+3) = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad [(m+2)x-(m+2)][(m-2)x+m+4] = 0.$$

c) *Kết luận*

– Nếu $m \neq 0$ và $m \neq -1$ thì phương trình có hai nghiệm $x = \dfrac{2}{m}$ và $x = -2$.

– Nếu $m = 0$ hoặc $m = -1$ thì phương trình có một nghiệm $x = -2$.

**3.61.** a) Với điều kiện $x \neq 2$ và $x \neq -3$, phương trình đã cho tương đương với phương trình

$$(x-2)(x+3) + 2(x+3) = 10(x-2) + 50. \qquad (1)$$

(1) $\Leftrightarrow x^2 - 7x - 30 = 0 \Leftrightarrow x = 10$ hoặc $x = -3$.

Đối chiếu với điều kiện, chỉ có nghiệm $x = 10$ là thích hợp.

b) Với điều kiện $x \neq 3$, phương trình đã cho tương đương với phương trình

$$x^2 - |x| - 12 = 2x(x-3) \text{ hay}$$
$$x^2 + |x| - 6x + 12 = 0. \qquad (2)$$

- Nếu $x \geq 0$ thì

$$(2) \quad \Leftrightarrow x^2 - 5x + 12 = 0,$$

phương trình này vô nghiệm.

- Nếu $x < 0$ thì

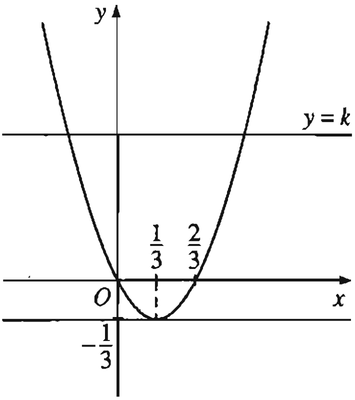
(2) $\Leftrightarrow x^2 - 7x + 12 = 0 \Leftrightarrow x = 3$ hoặc $x = 4$ (cả hai bị loại do $x < 0$).

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

**3.62.** a) Vẽ parabol $y = 3x^2 - 2x$ và xét đường thẳng $y = k$ (h. 3.3), ta có :

- Nếu $k < -\frac{1}{3}$ thì phương trình vô nghiệm.
- Nếu $k = -\frac{1}{3}$ thì phương trình có một nghiệm (kép).
- Nếu $k > -\frac{1}{3}$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt.

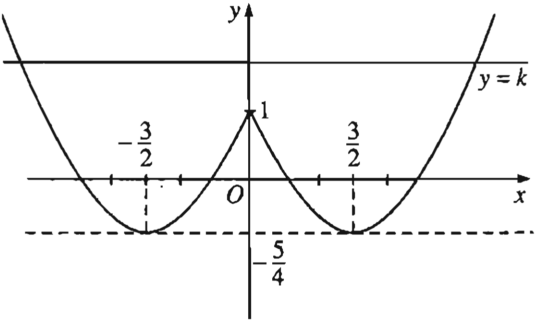
*Chú ý*. Kết quả trên cũng có thể được kiểm nghiệm lại bằng phương trình bậc hai $3x^2 - 2x - k = 0$, với biệt thức thu gọn là $\Delta' = 1 + 3k$.



*Hình 3.3*

b) Vẽ đồ thị của hàm số $y = x^2 - 3|x| + 1$ và đường thẳng $y = k$ (h. 3.4), ta có :

- Nếu $k < -\frac{5}{4}$ thì phương trình vô nghiệm.
- Nếu $k = -\frac{5}{4}$ thì phương trình có hai nghiệm (cả hai đều là nghiệm kép).
- Nếu $-\frac{5}{4} < k < 1$ thì phương trình có 4 nghiệm.



*Hình 3.4*

- Nếu $k = 1$ thì phương trình có 3 nghiệm.
- Nếu $k \geq 1$ thì phương trình có 2 nghiệm.

*Chú ý*. Có thể kiểm nghiệm lại kết quả trên bằng cách giải và biện luận phương trình đã cho theo tham số $k$.

**3.63.** a) Ta có $x^2 + x - 2 = 3x + k$ tương đương với phương trình

$$x^2 - 2x - (2 + k) = 0. \qquad (1)$$

Phương trình bậc hai (1) có biệt thức thu gọn $\Delta' = k + 3$. Do đó :

- Nếu $k < -3$ thì $\Delta' < 0$, phương trình (1) vô nghiệm nên đường thẳng ($d$) và parabol ($P$) không có điểm chung nào.

- Nếu $k = -3$ thì $\Delta' = 0$, phương trình (1) có một nghiệm nên đường thẳng ($d$) và parabol ($P$) có một điểm chung.

- Nếu $k > -3$ thì $\Delta' > 0$, phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt nên đường thẳng ($d$) và parabol ($P$) có hai điểm chung phân biệt.

b) Đường thẳng ($d$) cắt parabol ($P$) tại hai điểm nằm ở hai phía khác nhau của trục tung khi và chỉ khi phương trình (1) có hai nghiệm trái dấu, nghĩa là

$$-(2 + k) < 0, \text{ hay } k > -2.$$

c) Đường thẳng ($d$) cắt parabol ($P$) tại hai điểm nằm ở cùng một phía của trục tung khi và chỉ khi phương trình (1) có hai nghiệm cùng dấu. Nếu gọi hai nghiệm ấy là $x_1$ và $x_2$ thì $x_1 + x_2 = 2 > 0$. Điều đó chứng tỏ rằng khi hai nghiệm cùng dấu thì chúng có dấu dương, nghĩa là hai giao điểm nằm ở bên phải trục tung. Muốn vậy, ta phải có :

$$\Delta' = k + 3 > 0 \text{ và } -(2 + k) > 0, \text{ tức là } -3 < k < -2.$$

**3.64.** a) Điều kiện để phương trình (1) có nghiệm là $\Delta_1 = 25 - 4k \geq 0$. Với điều kiện đó, gọi hai nghiệm của (1) là $x_1$ và $x_2$. Theo điều kiện của đề bài, ta có :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 5 \\ x_1x_2 = k \\ x_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Từ đó suy ra $k = \dfrac{50}{9}$. Khi đó, (1) có hai nghiệm là $x_1 = \dfrac{5}{3}$ và $x_2 = \dfrac{10}{3}$.

*Chú ý.* Trong mỗi lời giải trên, ta nên lựa chọn cách đánh số các nghiệm sao cho "nghiệm này gấp đôi nghiệm kia" được thể hiện bởi hệ thức $x_2 = 2x_1$. Nếu không lựa chọn cách đánh số các nghiệm như vậy thì điều kiện "nghiệm này gấp đôi nghiệm kia" được diễn tả bởi hệ thức $(x_1 - 2x_2)(x_2 - 2x_1) = 0$.

b) Điều kiện để phương trình (2) có nghiệm là $\Delta_2 = 49 - 8k \geq 0$. Với điều kiện đó, gọi hai nghiệm của (1) là $x_3$ và $x_4$. Theo điều kiện của đề bài, ta có :

$$\begin{cases} x_3 + x_4 = 7 \\ x_3x_4 = 2k \\ x_3^2 + x_4^2 = 25. \end{cases}$$

Từ đó suy ra $k = 6$. Khi đó, (2) có hai nghiệm là $x_3 = 3$ và $x_4 = 4$.

c) Điều kiện để hai phương trình có nghiệm là $\Delta_1 \geq 0$ và $\Delta_2 \geq 0$, tức là $k \leq \frac{49}{8}$. Với cùng kí hiệu như trên, theo đề bài ta có hệ :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 5 \\ x_1x_2 = k \\ x_3 + x_4 = 7 \\ x_3x_4 = 2k \\ 2x_1 = x_3. \end{cases}$$

Từ đó ta có hai kết quả sau :

- $k = 0$. Khi đó phương trình (1) có hai nghiệm là $x_1 = 0$ và $x_2 = 5$, phương trình (2) có hai nghiệm $x_3 = 0$ và $x_4 = 7$ (thoả mãn điều kiện của bài toán vì $x_3 = 2x_1$).

- $k = 6$. Khi đó phương trình (1) có hai nghiệm $x_1 = 2$ và $x_2 = 3$, phương trình (2) có hai nghiệm $x_3 = 4$ và $x_4 = 3$ (thoả mãn điều kiện của bài toán vì $x_3 = 2x_1$).

**3.65.** a) Từ phương trình thứ hai trong hệ ta rút $y = x + 1$ rồi thế vào phương trình thứ nhất và thu gọn thì được phương trình bậc hai $2x^2 - 7x - 4 = 0$. Phương trình này cho ta hai nghiệm $x = -\frac{1}{2}$ và $x = 4$. Tương ứng ta được hai nghiệm của hệ phương trình đã cho là $(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$ và $(4 ; 5)$.

b) Ta có $(2x + 3y - 2)(x - 5y - 3) = 0 \Leftrightarrow 2x + 3y = 2$ hoặc $x - 5y = 3$. Do đó, hệ phương trình đã cho tương đương với

$$\text{(I)}\ \begin{cases} 2x + 3y = 2 \\ x - 3y = 1 \end{cases} \text{ hoặc (II) } \begin{cases} x - 5y = 3 \\ x - 3y = 1. \end{cases}$$

Hai hệ này cho ta hai nghiệm của hệ phương trình đã cho là $(1 ; 0)$ và $(-2 ; -1)$.

c) Đây là hệ phương trình đối xứng đối với hai ẩn. Do đó ta giải bằng cách đặt $u = x + y$ và $v = xy$. Khi đó ta thu được hệ phương trình ẩn $u$ và $v$

$$\text{(III)}\ \begin{cases} u^2 - 6u + 2v + 9 = 0 \\ 2u - v + 6 = 0. \end{cases}$$

Ta giải hệ phương trình (III) bằng phương pháp thế ; kết quả là hệ này vô nghiệm nên hệ phương trình đã cho vô nghiệm.

d) Trừ từng vế hai phương trình của hệ ta được $3(x^2 - y^2) = 7(x - y)$. Phương trình này tương đương với

$$x - y = 0 \text{ hoặc } 3x + 3y - 7 = 0.$$

Do đó, hệ phương trình đã cho tương đương với

$$\text{(IV)}\ \begin{cases} x^2 - 2y^2 = 7x \\ x - y = 0 \end{cases} \text{ hoặc (V) } \begin{cases} x^2 - 2y^2 = 7x \\ 3x + 3y - 7 = 0. \end{cases}$$

Hệ (IV) có hai nghiệm $(0 ; 0)$ và $(-7 ; -7)$ ; hệ (V) vô nghiệm.

Vậy hệ phương trình đã cho có hai nghiệm $(0 ; 0)$ và $(-7 ; -7)$.

**3.66.** a) Với $a = 2$, ta có hệ $\begin{cases} x^2 + y^2 = 6 \\ (x + y)^2 = 4. \end{cases}$

Đặt $u = x + y$ và $v = xy$, ta được hệ phương trình ẩn là $u$ và $v$ :

$$\begin{cases} u^2 - 2v = 6 \\ u^2 = 4. \end{cases}$$

Hệ này có hai nghiệm $(u ; v) = (2 ; -1)$ và $(u ; v) = (-2 ; -1)$. Do đó hệ phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ xy = -1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x + y = -2 \\ xy = -1. \end{cases}$$

Giải hai hệ phương trình trên, ta được 4 nghiệm của hệ phương trình đã cho là

$$(1+\sqrt{2}\ ;1-\sqrt{2}),(1-\sqrt{2}\ ;1-\sqrt{2}),$$
$$(-1+\sqrt{2}\ ;-1-\sqrt{2}),(-1+\sqrt{2}\ ;-1-\sqrt{2}).$$

b) Giả sử $(x\ ;y)=(x_0\ ;y_0)$ là nghiệm duy nhất của hệ. Do hệ phương trình đã cho là hệ phương trình đối xứng đối với các ẩn nên nó cũng có nghiệm là $(x\ ;\ y)=(y_0\ ;\ x_0)$. Từ tính duy nhất của hệ ta suy ra $x_0=y_0$. Do đó

$$\begin{cases}x_0^2+y_0^2=2(a+1)\\(x_0+y_0)^2=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2x_0^2=2(a+1)\\4x_0^2=4\end{cases}\Rightarrow a=0.$$

Ngược lại, nếu $a=0$ thì hệ trở thành $\begin{cases}x^2+y^2=2\\(x+y)^2=4.\end{cases}$

Tuy nhiên, hệ này có nghiệm không duy nhất (dễ thấy hai nghiệm của nó là $(1\ ;\ 1)$ và $(-1\ ;\ -1)$). Vậy không có giá trị nào của $a$ thoả mãn điều kiện của đầu bài.

**3.67.** Phương án (B).

**3.68.** Phương án (A).

**3.69.** Phương án (A).

**3.70.** Phương án (A).

**3.71.** Phương án (D).

**3.72.** (a) ↔ (4) ; (b) ↔ (1) ; (c) ↔ (3).

**3.73.** (a) ↔ (1) ; (b) ↔ (3) ; (c) ↔ (2).

## Chương IV

# BẤT ĐẲNG THỨC VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH

## A. NHỮNG KIẾN THỨC CẦN NHỚ

### 1. Tính chất của bất đẳng thức

1) $a > b$ và $b > c \Rightarrow a > c$.

2) $a > b \Leftrightarrow a + c > b + c$.

3) Nếu $c > 0$ thì $a > b \Leftrightarrow ac > bc$.

Nếu $c < 0$ thì $a > b \Leftrightarrow ac < bc$.

*Các hệ quả*

4) $a > b$ và $c > d \Rightarrow a + c > b + d$.

$a + c > b \Leftrightarrow a > b - c$.

5) $a \geq b \geq 0$ và $c \geq d \geq 0 \Rightarrow ac \geq bd$.

6) $a \geq b > 0$ và $n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow a^n \geq b^n$

7) $a \geq b > 0 \Rightarrow \sqrt{a} \geq \sqrt{b}$

8) $a > b \Rightarrow \sqrt[3]{a} > \sqrt[3]{b}$.

### 2. Bất đẳng thức về giá trị tuyệt đối

Đối với hai số $a$, $b$ tuỳ ý, ta có

$$|a| - |b| \leq |a + b| \leq |a| + |b|.$$

### 3. Bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân

1) Với mọi $a \geq 0$, $b \geq 0$, ta có

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}\ ;\ \frac{a+b}{2} = \sqrt{ab} \Leftrightarrow a = b.$$

2) Với mọi $a \geq 0$, $b \geq 0$, $c \geq 0$, ta có

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}\ ;\ \frac{a+b+c}{3} = \sqrt[3]{abc} \Leftrightarrow a=b=c.$$

*Áp dụng.* 1) Nếu hai số dương có tổng không đổi thì tích của chúng lớn nhất khi hai số đó bằng nhau.

2) Nếu hai số dương có tích không đổi thì tổng của chúng nhỏ nhất khi hai số đó bằng nhau.

## 4. Biến đổi tương đương các bất phương trình

Cho bất phương trình $f(x) < g(x)$ có tập xác định $\mathcal{D}$, $y = h(x)$ là một hàm số xác định trên $\mathcal{D}$. Khi đó, trên $\mathcal{D}$, bất phương trình $f(x) < g(x)$ tương đương với mỗi bất phương trình

1) $f(x) + h(x) < g(x) + h(x)$ ;

2) $f(x)h(x) < g(x)h(x)$ nếu $h(x) > 0$ với mọi $x \in \mathcal{D}$ ;

3) $f(x)h(x) > g(x)h(x)$ nếu $h(x) < 0$ với mọi $x \in \mathcal{D}$.

## 5. Bất phương trình và hệ bất phương trình bậc nhất một ẩn

- Giải và biện luận bất phương trình

$$ax + b < 0. \tag{1}$$

1) Nếu $a > 0$ thì tập nghiệm của (1) là $S = \left(-\infty\ ;\ -\frac{b}{a}\right)$.

2) Nếu $a < 0$ thì tập nghiệm của (1) là $S = \left(-\frac{b}{a}\ ;\ +\infty\right)$.

3) Nếu $a = 0$ thì (1) trở thành $0x < -b$ Do đó

(1) vô nghiệm ($S = \varnothing$) nếu $b \geq 0$ ;

(1) nghiệm đúng với mọi $x$ ($S = \mathbb{R}$) nếu $b < 0$.

- Để giải một hệ bất phương trình một ẩn, ta giải từng bất phương trình của hệ rồi lấy giao của các tập nghiệm thu được.

## 6. Dấu của nhị thức bậc nhất

1) Bảng xét dấu của nhị thức bậc nhất $ax + b$ $(a \neq 0)$

| $x$ | $-\infty$ | | $-\dfrac{b}{a}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $ax + b$ | | Trái dấu với $a$ | 0 | Cùng dấu với $a$ | |

2) Nếu $a > 0$ thì

$$|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a,$$

$$|x| > a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > a \\ x < -a. \end{array}\right.$$

## 7. Bất phương trình và hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn

1) Cách xác định miền nghiệm của $ax + by + c < 0$ $(a^2 + b^2 \neq 0)$. (1)

– Vẽ đường thẳng $(d): ax + by + c = 0$ ;

– Lấy điểm $M(x_0 ; y_0) \notin (d)$.

Nếu $ax_0 + by_0 + c < 0$ thì nửa mặt phẳng (không kể bờ $(d)$) chứa điểm $M$ là miền nghiệm của (1).

Nếu $ax_0 + by_0 + c > 0$ thì nửa mặt phẳng (không kể bờ $(d)$) không chứa điểm $M$ là miền nghiệm của (1).

*Chú ý.* Đối với bất phương trình $ax + by + c \leq 0$ $(a^2 + b^2 \neq 0)$ thì cách xác định miền nghiệm cũng tương tự, nhưng miền nghiệm là nửa mặt phẳng kể cả bờ.

2) Cách xác định miền nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn

– Với mỗi bất phương trình trong hệ, ta xác định miền nghiệm của nó và gạch bỏ miền còn lại.

– Sau khi làm như trên lần lượt đối với tất cả các bất phương trình trong hệ và trên cùng một mặt phẳng toạ độ, miền còn lại không bị gạch chính là miền nghiệm của hệ bất phương trình đã cho.

## 8. Dấu của tam thức bậc hai

1) Cho tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$.

- Nếu $\Delta < 0$ thì $f(x)$ cùng dấu với hệ số $a$ với mọi $x \in \mathbb{R}$, tức là

$$af(x) > 0 \text{ với mọi } x \in \mathbb{R}.$$

- Nếu $\Delta = 0$ thì $f(x)$ cùng dấu với hệ số $a$ với mọi $x \neq -\frac{b}{2a}$, tức là

$$af(x) > 0 \text{ với mọi } x \neq -\frac{b}{2a}.$$

- Nếu $\Delta > 0$ thì $f(x)$ có hai nghiệm phân biệt $x_1$ và $x_2$ $(x_1 < x_2)$. Khi đó $f(x)$ trái dấu với hệ số $a$ với mọi $x$ nằm trong khoảng $(x_1 ; x_2)$ (tức là với $x_1 < x < x_2$) và $f(x)$ cùng dấu với hệ số $a$ với mọi $x$ nằm ngoài đoạn $[x_1 ; x_2]$ (tức là với $x < x_1$ hoặc $x > x_2$). Nói cách khác,

$$af(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (x_1 ; x_2),$$

$$af(x) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < x_1 \\ x > x_2. \end{array}\right.$$

2) $\forall x \in \mathbb{R},\ ax^2 + bx + c > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0. \end{cases}$

$\forall x \in \mathbb{R},\ ax^2 + bx + c < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta < 0. \end{cases}$

## B. ĐỀ BÀI

## §1. BẤT ĐẲNG THỨC VÀ CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

**4.1.** a) Chứng minh rằng $a^2 + b^2 - ab \geq 0$ với mọi $a, b \in \mathbb{R}$.

Khi nào đẳng thức xảy ra ?

b) Chứng minh rằng nếu $a \geq b$ thì $a^3 - b^3 \geq ab^2 - a^2b$ với mọi $a, b \in \mathbb{R}$.

**4.2.** Chứng minh rằng

a) $a^4 + b^4 \geq a^3b + ab^3$ với mọi $a, b \in \mathbb{R}$.

b) $(a + b + c)^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2)$ với mọi $a, b, c \in \mathbb{R}$.

**4.3.** Cho $a$, $b$, $c$ là ba số dương. Chứng minh rằng

a) Nếu $a < b$ thì $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c}$ ; b) Nếu $a > b$ thì $\frac{a}{b} > \frac{a+c}{b+c}$.

**4.4.** Cho $a$, $b$, $c$, $d$ là bốn số dương và $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$. Chứng minh rằng :

a) $\frac{a+b}{b} < \frac{c+d}{d}$; b) $\frac{a+b}{a} > \frac{c+d}{c}$.

**4.5.** Cho $b$, $d$ là hai số dương và $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ Chứng minh rằng

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}.$$

**4.6.** Cho $a$, $b$, $c$, $d$ là bốn số dương. Chứng minh rằng

$$1 < \frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{b+c+d} + \frac{c}{c+d+a} + \frac{d}{d+a+b} < 2.$$

**4.7.** Chứng minh rằng

$$x^n + 1 \geq 0 \text{ với mọi } x \geq -1,\ n \in \mathbb{N}^*$$

**4.8.** Cho $a$, $b$, $c$ là số đo ba cạnh ; $A$, $B$, $C$ là số đo (độ) ba góc tương ứng của một tam giác. Chứng minh rằng :

a) $(a-b)(A-B) \geq 0$ ; khi nào đẳng thức xảy ra ?

b) $60^\circ \leq \frac{aA+bB+cC}{a+b+c} < 90^\circ$ ; khi nào đẳng thức xảy ra ?

(*Gợi ý*. Sử dụng bất đẳng thức tam giác).

**4.9.** a) Chứng minh rằng, với mọi số nguyên dương $k$ ta đều có

$$\frac{1}{(k+1)\sqrt{k}} < 2\left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}\right).$$

b) *Áp dụng*. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3\sqrt{2}} + \frac{1}{4\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}} < 2.$$

**4.10.** a) Cho $k > 0$, chứng minh $\frac{1}{k^3} < \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$.

b) Từ kết quả trên, hãy suy ra

$$\frac{1}{1^3}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\ldots+\frac{1}{n^3}<2.$$

**4.11.** a) Cho hai số $a$, $b$ ($a \neq b$). Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$f(x)=(x-a)^2+(x-b)^2$$

b) Cho ba số $a$, $b$, $c$ đôi một khác nhau. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$g(x)=(x-a)^2+(x-b)^2+(x-c)^2.$$

**4.12.** Với các số $a$, $b$, $c$ tuỳ ý, chứng minh các bất đẳng thức sau và nêu rõ đẳng thức xảy ra khi nào ?

a) $|a|+|b| \geq |a-b|$ ;

b) $|a+b+c| \leq |a|+|b|+|c|$

**4.13.** Với các số $a$, $b$, $c$ tuỳ ý, chứng minh bất đẳng thức

$$|a-b|+|b-c| \geq |a-c|.$$

**4.14.** Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$f(x)=|x-2006|+|x-2007|.$$

**4.15.** a) Chứng minh rằng $x+|x| \geq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

b) Chứng minh rằng $\sqrt{x+\sqrt{x^2-x+1}}$ xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$.

**4.16.** Để chứng minh $x(1-x) \leq \frac{1}{4}$ với mọi $x$, bạn An đã làm như sau :

Áp dụng bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân cho hai số $x$ và $1-x$, ta có

$$\sqrt{x(1-x)} \leq \frac{x+1-x}{2}=\frac{1}{2}.$$

Do đó

$$x(1-x) \leq \frac{1}{4}.$$

Theo em, bạn An giải như thế đúng hay sai, vì sao ? Em giải bài này như thế nào ?

**4.17.** Cho ba số không âm $a$, $b$, $c$. Chứng minh các bất đẳng thức sau và chỉ rõ đẳng thức xảy ra khi nào :

a) $(a+b)(ab+1) \geq 4ab$ ;  b) $(a+b+c)(ab+bc+ca) \geq 9abc$.

**4.18.** Cho ba số dương $a$, $b$, $c$, chứng minh rằng :

$$\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{b}{c}\right)\left(1+\frac{c}{a}\right) \geq 8.$$

**4.19.** Chứng minh rằng : Nếu $0 < a < b$ thì $a < \dfrac{2}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}} < \sqrt{ab} < \dfrac{a+b}{2} < b$.

**4.20.** Tìm giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau

a) $f(x) = x^2 + \dfrac{16}{x^2}$ ;  b) $g(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{1-x}$ với $0 < x < 1$.

**4.21.** Cho $a > 0$, hãy tìm giá trị lớn nhất của

$$y = x(a-2x)^2 \text{ với } 0 \leq x \leq \frac{a}{2}.$$

**4.22.** Cho một tấm tôn hình chữ nhật có kích thước 80 cm × 50 cm. Hãy cắt đi ở bốn góc vuông những hình vuông bằng nhau để khi gập lại theo mép cắt thì được một cái hộp (không nắp) có thể tích lớn nhất.

**4.23.** Chứng minh rằng

a) Nếu $x^2 + y^2 = 1$ thì $|x+2y| \leq \sqrt{5}$ ;

b) Nếu $3x + 4y = 1$ thì $x^2 + y^2 \geq \dfrac{1}{25}$.

**4.24.** Cho $a$, $b$, $c$ là ba số dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$A = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}.$$

**4.25.** Trên mặt phẳng toạ độ $Oxy$, vẽ đường tròn tâm $O$ có bán kính $R$ ($R > 0$). Trên các tia $Ox$ và $Oy$ lần lượt lấy hai điểm $A$ và $B$ sao cho đường thẳng $AB$ luôn tiếp xúc với đường tròn đó.

Hãy xác định toạ độ của $A$ và $B$ để tam giác $OAB$ có diện tích nhỏ nhất.

## §2. ĐẠI CƯƠNG VỀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH

**4.26.** Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng, mệnh đề nào sai, vì sao ?

a) 2 là một nghiệm của bất phương trình $x^2 + x + 1 > 0$.

b) $-3$ không là nghiệm của bất phương trình $x^3 - 3x - 1 < 0$.

c) $a$ là một nghiệm của bất phương trình $x^2 + (1 + a)x - a + 2 < 0$.

**4.27.** Các cặp bất phương trình sau có tương đương không, vì sao ?

a) $2x - 1 > 0$ và $2x - 1 + \frac{1}{x-2} > \frac{1}{x-2}$ ;

b) $2x - 1 > 0$ và $2x - 1 + \frac{1}{x+2} > \frac{1}{x+2}$ ;

c) $x - 3 < 0$ và $x^2(x - 3) < 0$ ; d) $x - 3 > 0$ và $x^2(x - 3) > 0$ ;

e) $x - 2 > 0$ và $(x - 2)^2 > 0$ ; g) $x - 5 > 0$ và $(x - 5)(x^2 - 2x + 2) > 0$.

**4.28.** Tìm điều kiện xác định rồi suy ra tập nghiệm của mỗi bất phương trình sau :

a) $\sqrt{x-2} \geq \sqrt{2-x}$ ; b) $\sqrt{2x-3} < 1 + \sqrt{2x-3}$ ;

c) $\frac{x}{\sqrt{x-3}} < \frac{3}{\sqrt{x-3}}$ ; d) $3x + \frac{1}{x-2} \geq 2 + \frac{1}{x-2}$.

**4.29.** Không giải bất phương trình hãy giải thích tại sao các bất phương trình sau vô nghiệm :

a) $\sqrt{x-2} + 1 < 0$ ;

b) $(x - 1)^2 + x^2 \leq -3$ ;

c) $x^2 + (x - 3)^2 + 2 > (x - 3)^2 + x^2 + 5$ ;

d) $\sqrt{1 + 2(x+1)^2} + \sqrt{10 - 6x + x^2} < 2$.

**4.30.** Không giải bất phương trình, hãy giải thích tại sao các bất phương trình sau nghiệm đúng với mọi $x$ :

a) $x^4 + x^2 + 1 > 0$ ; b) $\frac{(x-2)^2}{x^2+1} \geq 0$ ;

c) $x^2 + (x - 1)^2 + \frac{1}{x^2+1} > x^2$

**4.31.** Tìm điều kiện xác định của các bất phương trình sau :

a) $\dfrac{1}{(x+1)^2} + \dfrac{1}{x-3} > 2$ ;     b) $\dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}} + \dfrac{1}{(x-2)(x-3)} > \dfrac{1}{x-4}$.

**4.32.** Để giải bất phương trình $\sqrt{x-2} > \sqrt{2x-3}$ (1), bạn Nam đã làm như sau :

Do hai vế của bất phương trình (1) luôn không âm nên (1) tương đương với $(\sqrt{x-2})^2 > (\sqrt{2x-3})^2$ hay $x - 2 > 2x - 3$. Do đó $x < 1$.

Vậy tập nghiệm của (1) là $(-\infty, 1)$.

Theo em, bạn Nam giải đã đúng chưa, vì sao ?

**4.33.** Bạn Minh giải bất phương trình $\dfrac{1}{\sqrt{x^2-2x-3}} < \dfrac{1}{x+5}$ (1) như sau :

$$(1) \Leftrightarrow x + 5 < \sqrt{x^2 - 2x - 3} \Leftrightarrow (x+5)^2 < x^2 - 2x - 3$$

$$\Leftrightarrow 12x + 28 < 0 \Leftrightarrow x < -\frac{7}{3}.$$

Theo em, bạn Minh giải đúng hay sai, vì sao ?

## §3. BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

**4.34.** Giải các bất phương trình sau và biểu diễn tập nghiệm trên trục số :

a) $2(x-1) + x > \dfrac{x+3}{3} + 3$ ;     b) $(x+\sqrt{2})^2 \leq (x-\sqrt{2})^2 + 2$ ;

c) $x(7-x) + 6(x-1) < x(2-x)$ ;     d) $\dfrac{x+2}{2} + \dfrac{x-2}{3} + \dfrac{x-1}{4} \geq 3 + \dfrac{x}{2}$.

**4.35.** Giải các bất phương trình

a) $(x+2)\sqrt{x+3}\sqrt{x+4} \leq 0$ ;     b) $(x+2)\sqrt{(x+3)(x+4)} < 0$ ;

c) $\sqrt{(x-1)^2(x-2)} \geq 0$ ;     d) $\sqrt{2x-8} - \sqrt{4x-21} > 0$.

**4.36.** Giải các hệ bất phương trình sau và biểu diễn tập nghiệm trên trục số :

a) $\begin{cases} 3x + \dfrac{3}{5} < x + 2 \\ \dfrac{6x - 3}{2} < 2x + 1 \,; \end{cases}$ b) $\begin{cases} \dfrac{4x + 5}{6} < x - 3 \\ 2x + 3 > \dfrac{7x - 4}{3}. \end{cases}$

**4.37.** Giải và biện luận các bất phương trình (ẩn $x$):

a) $m(x - m) \geq 0$ ; b) $(x - 1)m > x + 2$ ;

c) $\dfrac{x - ab}{a + b} + \dfrac{x - ac}{a + c} + \dfrac{x - bc}{b + c} \leq a + b + c$ ; d) $bx + b < a - ax$.

**4.38.** Bạn Nam đã giải bất phương trình

$$\sqrt{x^2 - 1} - \sqrt{x + 1} \geq x + 1 \qquad (1)$$

như sau :

Điều kiện : $\begin{cases} x^2 - 1 \geq 0 \\ x + 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - 1)(x + 1) \geq 0 \\ x + 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 \geq 0 \\ x + 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 1.$

Khi đó bất phương trình (1) có dạng

$$\sqrt{(x - 1)(x + 1)} - \sqrt{x + 1} \geq x + 1\,.$$

Chia hai vế cho $\sqrt{x + 1} > 0$, ta có

$$\sqrt{x - 1} - 1 \geq \sqrt{x + 1}\,.$$

Vì $x \geq 1$ nên $\sqrt{x - 1} < \sqrt{x + 1}$, do đó $\sqrt{x - 1} - 1 < \sqrt{x + 1}$.

Vậy bất phương trình (1) vô nghiệm.

Theo em, bạn Nam giải đúng hay sai, vì sao ?

**4.39.** Tìm các giá trị của $m$ để hệ bất phương trình sau có nghiệm :

$$\begin{cases} x + 4m^2 \leq 2mx + 1 \\ 3x + 2 > 2x - 1. \end{cases}$$

**4.40.** Tìm các giá trị của $m$ để hệ bất phương trình sau vô nghiệm :

$$\begin{cases} mx + 9 < 3x + m^2 \\ 4x + 1 < -x + 6. \end{cases}$$

# §4. DẤU CỦA NHỊ THỨC BẬC NHẤT

**4.41.** Xét dấu của các biểu thức sau bằng cách lập bảng :

a) $(3x-1)(x+2)$ ;

b) $\dfrac{2-3x}{5x-1}$ ;

c) $(-x+1)(x+2)(3x+1)$ ;

d) $2-\dfrac{2+x}{3x-2}$.

**4.42.** Phân tích các đa thức sau thành nhân tử rồi xét dấu mỗi đa thức ấy :

a) $9x^2-1$ ;

b) $-x^3+7x-6$ ;

c) $x^3+x^2-5x+3$ ;

d) $x^2-x-2\sqrt{2}$

**4.43.** Xét dấu các biểu thức sau :

a) $\dfrac{1}{3-x}-\dfrac{1}{3+x}$ ;

b) $\dfrac{x^2-6x+8}{x^2+8x-9}$ ;

c) $\dfrac{x^2+4x+4}{x^4-2x^2}$ ;

d) $\dfrac{|x+1|-1}{x^2+x+1}$.

**4.44.** Giải các bất phương trình sau :

a) $(-\sqrt{2}x+2)(x+1)(2x-3)>0$ ;

b) $\dfrac{-4x+1}{3x+1}\le -3$.

**4.45.** Giải các phương trình sau :

a) $|5+x|+|x-3|=8$ ;

b) $|x^2-5x+6|=x^2-5x+6$ ;

c) $|2x-1|=x+2$ ;

d) $|x+2|+|x-1|=5$.

**4.46.** Giải các bất phương trình sau :

a) $|3x-5|<2$ ;

b) $\left|\dfrac{2-x}{x+1}\right|\ge 2$ ;

c) $|x-2|>2x-3$ ;

d) $|x+1|\le |x|-x+2$.

# §5. BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

**4.47.** Xác định miền nghiệm của các bất phương trình sau ($x$, $y$ là hai ẩn) :

a) $2(x + y + 1) > x + 2$ ; b) $2(y + x) \leq 3(x + 1) + 1$ ;

c) $y + 0.x > 5$ ; d) $0.y + x \leq 3$.

**4.48.** Xác định miền nghiệm của các hệ bất phương trình sau :

a) $\begin{cases} x - 2y < 0 \\ x + 3y > -2 \,; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x \geq 0 \\ y < 3. \end{cases}$

**4.49.** Xác định miền nghiệm của các hệ bất phương trình sau :

a) $\begin{cases} x - 3y < 0 \\ x + 2y > -3 \\ y + x < 2 \,; \end{cases}$ b) $\begin{cases} y \geq 0 \\ -\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} + 1 < \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{2} < 1. \end{cases}$

**4.50.** Xác định miền nghiệm của hệ bất phương trình

$$\begin{cases} |x - 1| < 1 \\ |y + 1| \leq 2. \end{cases}$$

**4.51.** a) Xác định miền nghiệm của hệ bất phương trình

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 5 \\ 0 \leq y \leq 10 \\ \dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{5} \geq 1 \\ \dfrac{-x}{2} + \dfrac{y}{2} \geq 1 \end{cases}$$

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = 2x - 2y + 3$ trên miền nghiệm ở câu a, biết rằng miền nghiệm đó là miền đa giác và $T$ có giá trị nhỏ nhất tại một trong các đỉnh của đa giác đó.

**4.52.** Một xí nghiệp sản xuất hai loại sản phẩm kí hiệu là *I* và *II*. Một tấn sản phẩm *I* lãi 2 triệu đồng, một tấn sản phẩm *II* lãi 1,6 triệu đồng. Muốn sản xuất 1 tấn sản phẩm *I* phải dùng máy $M_1$ trong 3 giờ và máy $M_2$ trong 1 giờ. Muốn sản xuất 1 tấn sản phẩm *II* phải dùng máy $M_1$ trong 1 giờ và máy $M_2$ trong 1 giờ. Biết rằng một máy không thể dùng để sản xuất đồng thời hai loại sản phẩm ; máy $M_1$ làm việc không quá 6 giờ trong một ngày, máy $M_2$ một ngày chỉ làm việc không quá 4 giờ.

Giả sử xí nghiệp sản xuất trong một ngày được $x$ (tấn) sản phẩm *I* và $y$ (tấn) sản phẩm *II*.

a) Viết các bất phương trình biểu thị các điều kiện của bài toán thành một hệ bất phương trình rồi xác định miền nghiệm $(S)$ của hệ đó.

b) Gọi $T$ (triệu đồng) là số tiền lãi mỗi ngày của xí nghiệp. Hãy biểu diễn $T$ theo $x$, $y$.

c) Ở câu a) ta thấy $(S)$ là một miền đa giác. Biết rằng $T$ có giá trị lớn nhất tại $(x_0 ; y_0)$ với $(x_0 ; y_0)$ là toạ độ của một trong các đỉnh của $(S)$.

Hãy đặt kế hoạch sản xuất của xí nghiệp sao cho tổng số tiền lãi cao nhất.

## §6. DẤU CỦA TAM THỨC BẬC HAI

**4.53.** Xét dấu của các tam thức bậc hai :

a) $2x^2 + 2x + 5$ ; b) $-x^2 + 5x - 6$ ;

c) $2x^2 + 2x\sqrt{2} + 1$ ; d) $-4x^2 - 4x + 1$ ;

e) $\sqrt{3}x^2 + (\sqrt{3} + 1)x + 1$ ; f) $x^2 + (\sqrt{5} - 1)x - \sqrt{5}$ ;

g) $-0,3x^2 + x - 1,5$ ; h) $x^2 - (\sqrt{7} - 1)x + \sqrt{3}$.

**4.54.** Xét dấu của các biểu thức :

a) $\dfrac{x - 7}{4x^2 - 19x + 12}$ ; b) $\dfrac{11x + 3}{-x^2 + 5x - 7}$ ;

c) $\dfrac{3x - 2}{x^3 - 3x^2 + 2}$ ; d) $\dfrac{x^2 + 4x - 12}{\sqrt{6}x^2 + 3x + \sqrt{2}}$ ;

e) $\dfrac{x^2 - 3x - 2}{-x^2 + x - 1}$ ; f) $\dfrac{x^3 - 5x + 4}{x^4 - 4x^3 + 8x - 5}$.

**4.55.** Chứng minh rằng các phương trình sau luôn có nghiệm với mọi giá trị của tham số $m$ :

a) $x^2 + (m+1)x + m - \frac{1}{3} = 0$ ; b) $x^2 - 2(m-1)x + m - 3 = 0$ ;

c) $x^2 + (m+2)x + \frac{3}{4}m + \frac{1}{2} = 0$ ; d) $(m-1)x^2 + (3m-2)x + 3 - 2m = 0$.

**4.56.** Chứng minh rằng các phương trình sau vô nghiệm dù $m$ lấy bất kì giá trị nào :

a) $(2m^2 + 1)x^2 - 4mx + 2 = 0$ ;

b) $\frac{1}{2}x^2 + (m+1)x + m^2 + m + 1 = 0$ ;

c) $x^2 + 2(m-3)x + 2m^2 - 7m + 10 = 0$ ;

d) $x^2 - (\sqrt{3}m - 1)x + m^2 - \sqrt{3}m + 2 = 0$.

**4.57.** Tìm các giá trị của $m$ để mỗi biểu thức sau luôn dương :

a) $x^2 - 4x + m - 5$ ; b) $x^2 - (m+2)x + 8m + 1$ ;

c) $x^2 + 4x + (m-2)^2$ ; d) $(3m+1)x^2 - (3m+1)x + m + 4$.

**4.58.** Tìm các giá trị của $m$ để mỗi biểu thức sau luôn âm :

a) $(m-4)x^2 + (m+1)x + 2m - 1$ ; b) $(m+2)x^2 + 5x - 4$ ;

c) $mx^2 - 12x - 5$ ; d) $-x^2 + 4(m+1)x + 1 - m^2$

## §7. BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

**4.59.** Giải các bất phương trình :

a) $2x^2 - 7x - 15 \geq 0$ ; b) $12x^2 - 17x - 105 < 0$ ;

c) $x(x+5) \leq 2(x^2 + 2)$ ; d) $2(x+2)^2 - 3,5 \geq 2x$ ;

e) $\frac{1}{3}x^2 - 3x + 6 < 0$.

**4.60.** Giải các bất phương trình :

a) $\dfrac{2x-5}{x^2 - 6x - 7} < \dfrac{1}{x-3}$ ; b) $\dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + 5x + 6} \geq \dfrac{x+1}{x}$ ;

c) $\dfrac{2}{x^2 - x + 1} - \dfrac{1}{x+1} \geq \dfrac{2x-1}{x^3 + 1}$; d) $\dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x+1} \leq 0$.

**4.61.** Tìm các giá trị nguyên không âm của $x$ thoả mãn bất phương trình :

$$\frac{x+3}{x^2-4}-\frac{1}{x+2}<\frac{2x}{2x-x^2}.$$

**4.62.** Giải các bất phương trình :

a) $(x-1)\sqrt{x^2-x-2}\geq 0$ ; b) $\dfrac{\sqrt{-x^2+x+6}}{2x+5}\geq\dfrac{\sqrt{-x^2+x+6}}{x-4}$.

**4.63.** Giải các hệ bất phương trình và biểu diễn tập nghiệm của chúng trên trục số :

a) $\begin{cases}x^2-2x-3>0\\x^2-11x+28\geq 0\end{cases}$ ; b) $\begin{cases}x^2-\dfrac{1}{4}>0\\-2x^2+5x-3>0\end{cases}$ ;

c) $\begin{cases}3x^2-4x+1>0\\3x^2-5x+2\leq 0\end{cases}$ ; d) $\begin{cases}x^2-8x+7<0\\x^2-8x+20>0.\end{cases}$

**4.64.** Giải các hệ bất phương trình và biểu diễn tập nghiệm của chúng trên trục số :

a) $\begin{cases}x^2-4x-5<0\\x^2-6x+8>0\\2x-3\geq 0\end{cases}$ ; b) $\begin{cases}x^2-12x-64<0\\x^2-8x+15>0\\-\dfrac{3}{4}\leq x\leq\dfrac{13}{2}.\end{cases}$

**4.65.** Tìm tập xác định của hàm số sau :

$$f(x)=\sqrt{\frac{3-3x}{-x^2-2x+15}-1}.$$

**4.66.** Tìm các giá trị của tham số $m$ để hệ bất phương trình :

a) $\begin{cases}x^2-3x-4\leq 0\\(m-1)x-2\geq 0\end{cases}$ có nghiệm ; b) $\begin{cases}x^2+10x+16\leq 0\\mx\geq 3m+1\end{cases}$ vô nghiệm.

**4.67.** Tìm các giá trị của tham số $m$ để mỗi phương trình sau có nghiệm :

a) $2x^2+2(m+2)x+3+4m+m^2=0$ ;

b) $(m-1)x^2-2(m+3)x-m+2=0$.

**4.68.** Tìm các giá trị của tham số *m* để mỗi bất phương trình sau nghiệm đúng mọi giá trị *x* :

a) $(m+1)x^2 - 2(m-1)x + 3m - 3 \geq 0$ ;

b) $(m^2 + 4m - 5)x^2 - 2(m-1)x + 2 < 0$ ;

c) $\dfrac{x^2 - 8x + 20}{mx^2 + 2(m+1)x + 9m + 4} < 0$ ;

d) $\dfrac{3x^2 - 5x + 4}{(m-4)x^2 + (1+m)x + 2m - 1} > 0.$

**4.69.** Tìm các giá trị của *m* để phương trình :

a) $x^2 + 2(m+1)x + 9m - 5 = 0$ có hai nghiệm âm phân biệt ;

b) $(m-2)x^2 - 2mx + m + 3 = 0$ có hai nghiệm dương phân biệt.

**4.70.** Cho phương trình : $(m-2)x^4 - 2(m+1)x^2 + 2m - 1 = 0.$

Tìm các giá trị của tham số *m* để phương trình trên có :

a) Một nghiệm ;

b) Hai nghiệm phân biệt ;

c) Bốn nghiệm phân biệt.

## §8 MỘT SỐ PHƯƠNG TRÌNH VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ BẬC HAI

**4.71.** Giải các phương trình :

a) $9x + \sqrt{3x-2} = 10$ ;

b) $\sqrt{-x^2 + 2x + 4} = x - 2$ ;

c) $\sqrt{x^2 - 2x - 3} = 2x + 3$ ;

d) $\sqrt{9 - 5x} = \sqrt{3 - x} + \dfrac{6}{\sqrt{3 - x}}$.

**4.72.** Giải các phương trình sau :

a) $(x+1)\sqrt{16x + 17} = (x+1)(8x - 23)$ ;

b) $\dfrac{21}{x^2 - 4x + 10} - x^2 + 4x - 6 = 0$ ;

c) $\dfrac{2x}{2x^2 - 5x + 3} + \dfrac{13x}{2x^2 + x + 3} = 6$ ;

d) $x^2 + \left(\dfrac{x}{x-1}\right)^2 = 1$.

**4.73.** Giải các phương trình sau :

a) $2x^2 - 3 - 5\sqrt{2x^2 + 3} = 0$ ; b) $2x^2 + 3x + 3 = 5\sqrt{2x^2 + 3x + 9}$ ;

c) $9 - \sqrt{81 - 7x^3} = \dfrac{x^3}{2}$ ; d) $x^2 + 3 - \sqrt{2x^2 - 3x + 2} = \dfrac{3}{2}(x + 1)$.

**4.74.** Tìm tất cả các giá trị $x$ thoả mãn :

a) $|x^2 + x - 1| = 2x - 1$ và $x < \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ ;

b) $|x^2 + 2x - 4| + 2x + 6 = 0$ và $x + \sqrt{18} < 1$ ;

c) $|x + 3| + x^2 + 3x = 0$ ;

d) $|x^2 - 20x - 9| = |3x^2 + 10x + 21|$.

**4.75.** Giải các phương trình sau :

a) $x^2 - |2x - 1| = 0$ ; b) $|x^2 - 2x - 3| = x^2 - 2x + 5$ ;

c) $|2x - 3| = |x - 1|$ ; d) $|x^2 - 2x - 3| = 2$.

**4.76.** Giải các phương trình sau :

a) $\sqrt{x + 3 - 4\sqrt{x - 1}} + \sqrt{x + 8 - 6\sqrt{x - 1}} = 1$ ;

b) $\sqrt{x + \sqrt{14x - 49}} + \sqrt{x - \sqrt{14x - 49}} = \sqrt{14}$ ;

c) $\left|2\sqrt{2|x| - 1} - 1\right| = 3$ ;

d) $\left|x + \sqrt{1 - x^2}\right| = -\sqrt{2}(2x^2 - 1)$.

**4.77.** Giải các bất phương trình sau :

a) $\sqrt{-x^2 - 8x - 12} > x + 4$ ; b) $\sqrt{5x^2 + 61x} < 4x + 2$ ;

c) $\dfrac{\sqrt{2 - x} + 4x - 3}{x} \geq 2$ ; d) $\dfrac{3(4x^2 - 9)}{\sqrt{3x^2 - 3}} \leq 2x + 3$.

**4.78.** Giải các bất phương trình sau :

a) $\sqrt{x + 3} < 1 - x$ ; b) $\sqrt{-x^2 + 6x - 5} > 8 - 2x$ ;

c) $4\left(x + \dfrac{1}{2}\right) > \sqrt{5x^2 + 61x}$ ; d) $\sqrt{(x^2 - x)^2} > x - 2$.

**4.79.** Giải các bất phương trình :

a) $|3-\sqrt{x+5}|>x$ ; b) $7|4-\sqrt{x+9}|>x-9$ ;

c) $x+13+|24-6\sqrt{6-x}|>0$ ; d) $\sqrt{x(x+6)+9}-\sqrt{x^2-6x+9}>1$.

**4.80.** Giải các bất phương trình sau :

a) $(x^2+x+1)(x^2+x+3)\geq 15$ ;

b) $(x+4)(x+1)-3\sqrt{x^2+5x+2}<6$ ;

c) $x^2-4x-6\geq\sqrt{2x^2-8x+12}$.

**4.81.** Giải các bất phương trình sau :

a) $(x-3)\sqrt{x^2+4}\leq x^2-9$ ; b) $\dfrac{9x^2-4}{\sqrt{5x^2-1}}\leq 3x+2$.

**4.82.** Đối với mỗi giá trị của tham số $m$, hãy xác định số nghiệm của phương trình : $\sqrt{2|x|-x^2}=m$.

## BÀI TẬP ÔN TẬP CHƯƠNG IV

**4.83.** Không dùng máy tính và bảng số, hãy so sánh

a) $\dfrac{3-\sqrt{123}}{4}$ và $\dfrac{2-\sqrt{37}}{3}$ ; b) $\dfrac{3\sqrt{7}+5\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$ và 6,9.

**4.84.** Chứng minh rằng nếu $|a|<1$, $|b-1|<10$, $|a-c|<10$ thì $|ab-c|<20$.

**4.85.** Cho các số không âm $a$, $b$, $c$. Chứng minh rằng :

a) $\dfrac{a^6+b^9}{4}\geq 3a^2b^3-16$ ;

b) $a+b+2a^2+2b^2\geq 2ab+2b\sqrt{a}+2a\sqrt{b}$.

**4.86.** Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức :

a) $A=a^2+b^2+ab-3a-3b+2006$ ;

b) $B=a^2+2b^2-2ab+2a-4b-12$.

**4.87.** Chứng minh rằng nếu các số $a$, $b$, $c$ đều dương thì :

a) $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2) \geq 9abc$ ; b) $\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c} \geq a+b+c$ ;

c) $\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b} \geq \frac{a+b+c}{2} \geq \frac{ab}{a+b}+\frac{bc}{b+c}+\frac{ca}{c+a}$.

**4.88.** Hãy xác định giá trị nhỏ nhất của các biểu thức sau :

a) $P = |x+1| + |2x+5| + |3x-18|$ ;

b) $Q = |x-1| + |y-2| + |z-3|$ với $|x|+|y|+|z| = 2006$.

**4.89.** Giải các bất phương trình sau :

a) $\frac{3x-1}{\sqrt{3}} - x + 2 > 2x - 3$ ; b) $\frac{2x+5}{3} - 3 \leq \frac{3x-7}{4} + x + 2$ ;

c) $(1+\sqrt{3})x \leq 4 + 2\sqrt{3}$ ; d) $(x-\sqrt{5})^2 \geq (x+\sqrt{5})^2 - 10$.

**4.90.** Giải và biện luận các bất phương trình sau theo tham số $m$ :

a) $mx - 1 > 3x + m^2$ ; b) $m(m-2)x + 1 \geq m - 1$ ;

c) $\frac{3x}{(m-7)^2} < \frac{x-1}{m-7}$ ; d) $x^2 + 2mx + 5 \geq 0$ ;

e) $mx^2 + 4x + 1 \leq 0$ ; f) $(m-3)x^2 - 2(m+1)x - (2m-3) \leq 0$.

**4.91.** Tìm tất cả các nghiệm nguyên của mỗi hệ bất phương trình sau :

a) $\begin{cases} 42x + 5 > 28x + 49 \\ \frac{8x+3}{2} < 2x + 25 \end{cases}$ ; b) $\begin{cases} 45x - 2 > 6x + \frac{1}{3} \\ 2(3x-4) < \frac{9x-14}{2}. \end{cases}$

**4.92.** Xác định các giá trị của $m$ để mỗi hệ bất phương trình sau có nghiệm :

a) $\begin{cases} 7x - 2 \geq -4x + 19 \\ 2x - 3m + 2 < 0 \end{cases}$ ; b) $\begin{cases} \sqrt{2}x + 1 > x - \sqrt{2} \\ m + x > 2. \end{cases}$

**4.93.** Giải các bất phương trình sau :

a) $|x-1| + |x+2| < 3$ ;　　b) $2|x-3| - |3x+1| \leq x+5$ ;

c) $\dfrac{|2x-1|}{x^2-3x-4} < \dfrac{1}{2}$.

**4.94.** Giải các bất phương trình sau :

a) $(x^2+3x+1)(x^2+3x-3) \geq 5$ ;　　b) $(x^2-x-1)(x^2-x-7) < -5$ ;

c) $\dfrac{20}{x^2-7x+12} + \dfrac{10}{x-4} + 1 > 0$ ;　　d) $2x^2+2x - \dfrac{15}{x^2+x+1} + 1 < 0$.

**4.95.** Tìm các giá trị của $x$ thoả mãn hệ bất phương trình :

a) $\begin{cases} 2x^2+9x+9 > 0 \\ 5x^2-7x-3 \leq 0 ; \end{cases}$　　b) $\begin{cases} 3x^2+11x-4 \leq 0 \\ x^2-8x-20 \leq 0 ; \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2(x-1)-3(x-4) > x+5 \\ \dfrac{3x-4}{x^2+4x+4} \geq 0 ; \end{cases}$　　d) $\begin{cases} \dfrac{3x^2-7x+8}{x^2+1} > 1 \\ \dfrac{3x^2-7x+8}{x^2+1} \leq 2. \end{cases}$

**4.96.** Xác định các giá trị của tham số $m$ để mỗi bất phương trình sau nghiệm đúng với mọi $x$.

a) $\dfrac{x^2+mx-1}{2x^2-2x+3} < 1$ ;　　b) $-4 < \dfrac{2x^2+mx-4}{-x^2+x-1} < 6$.

**4.97.** Tuỳ theo giá trị của tham số $m$, hãy biện luận số nghiệm phương trình

$$(m+3)x^4 - (2m-1)x^2 - 3 = 0.$$

**4.98.** Xét dấu các biểu thức sau :

a) $\dfrac{7x-4}{8x+5} - 2$ ;　　b) $\dfrac{x^2-5x+4}{x^2+5x+4}$ ;

c) $\dfrac{15x^2-7x-2}{6x^2-x+5}$ ;　　d) $\dfrac{x^4-17x^2+60}{x(x^2-8x+5)}$.

**4.99.** Giải các bất phương trình :

a) $\dfrac{\sqrt{x^2-16}}{\sqrt{x-3}}+\sqrt{x-3}>\dfrac{5}{\sqrt{x-3}}$ ; b) $\sqrt{x^6-4x^3+4}>x-\sqrt[3]{2}$ ;

c) $\sqrt{3x^2+5x+7}-\sqrt{3x^2+5x+2}>1$.

**4.100.** Giải các bất phương trình :

a) $\sqrt{x-1}-\sqrt{x-2}>\sqrt{x-3}$ ; b) $2x(x-1)+1>\sqrt{x^2-x+1}$ ;

c) $\sqrt{\dfrac{4x}{x-1}}-\sqrt{\dfrac{x-1}{4x}}>\dfrac{3}{2}$ ; d) $\sqrt{x-\dfrac{1}{x}}-\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}>\dfrac{x-1}{x}$.

**4.101.** Tìm các giá trị $x$ thoả mãn :

a) $|x^2-2x-3|-2>|2x-1|$ ; b) $2|x+1|<|x-2|+3x+1$ ;

c) $|\sqrt{x-3}-1|+|\sqrt{x+5}-1|>2$ ; d) $|x-6|>|x^2-5x+9|$.

**4.102.** Giải các bất phương trình sau :

a) $\left|\dfrac{3x+1}{x-3}\right|<3$ ; b) $\dfrac{|x+2|-|x|}{\sqrt{4-x^3}}>0$ ;

c) $\dfrac{3}{|x+3|-1}\geq|x+2|$ ; d) $\dfrac{9}{|x-5|-3}\geq|x-2|$.

**4.103.** Cho phương trình $(m-\sqrt{5})x^2-3mx+m+1=0$. Với các giá trị nào của $m$ thì

a) Phương trình đã cho có nghiệm ?

b) Phương trình đã cho có hai nghiệm trái dấu nhau.

**4.104.** Tuỳ thuộc vào giá trị của tham số $m$, hãy xác định số nghiệm của phương trình :

$$|x^2-2x-3|=m.$$

**4.105.** Tìm tất cả các giá trị của $m$ để ứng với mỗi giá trị đó phương trình

$$|1-mx|=1+(1-2m)x+mx^2$$

chỉ có đúng một nghiệm.

# GIỚI THIỆU MỘT SỐ CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN

**4.106.** Trong các khẳng định sau đây, khẳng định nào đúng ?

a) $\begin{cases} a < b \\ c < d \end{cases} \Rightarrow a + c < b + d$ ;　　b) $\begin{cases} a < b \\ c < d \end{cases} \Rightarrow a - c < b - d$ ;

c) $\begin{cases} a < b \\ c < d \end{cases} \Rightarrow ac < bd$ ;　　d) $\begin{cases} a < b \\ c < d \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{c} < \frac{b}{d}$ ;

e) $a > b \Rightarrow a^2 > b^2$ ;　　f) $a > b \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ ;

g) $a > b \Rightarrow ac > bc$ ;　　h) $a > b \Rightarrow \sqrt{a} > \sqrt{b}$ ;

i) $a + b > 2 \Rightarrow \begin{cases} a > 1 \\ b > 1 \end{cases}$ ;　　k) $ab > 1 \Rightarrow \begin{cases} a > 1 \\ b > 1. \end{cases}$

*Chọn phương án trả lời mà em cho là đúng ở các bài sau* (từ 4.107 đến 4.114)

**4.107.** $x = -3$ thuộc tập nghiệm của bất phương trình

(A) $(x + 3)(x + 2) > 0$ ;　　(B) $(x + 3)^2(x + 2) \le 0$ ;

(C) $x + \sqrt{1 - x^2} \ge 0$ ;　　(D) $\frac{1}{1 + x} + \frac{2}{3 + 2x} > 0$.

**4.108.** Bất phương trình $(x - 1)\sqrt{x(x + 2)} \ge 0$ tương đương với bất phương trình

(A) $(x - 1)\sqrt{x}\sqrt{x + 2} \ge 0$ ;　　(B) $\sqrt{(x - 1)^2 x(x + 2)} \ge 0$ ;

(C) $\frac{(x - 1)\sqrt{x(x + 2)}}{(x + 3)^2} \ge 0$ ;　　(D) $\frac{(x - 1)\sqrt{x(x + 2)}}{(x - 2)^2} \ge 0$.

**4.109.** Bất phương trình $mx > 3$ vô nghiệm khi

(A) $m = 0$ ;　　(B) $m > 0$ ;　　(C) $m < 0$ ;　　(D) $m \ne 0$.

**4.110.** Bất phương trình $\frac{2 - x}{2x + 1} \ge 0$ có tập nghiệm là

(A) $\left(-\frac{1}{2} ; 2\right)$ ;　　(B) $\left[-\frac{1}{2} ; 2\right]$ ;　　(C) $\left[-\frac{1}{2} ; 2\right)$ ;　　(D) $\left(-\frac{1}{2} ; 2\right]$.

**4.111.** Hệ bất phương trình $\begin{cases} 2 - x > 0 \\ 2x + 1 > x - 2 \end{cases}$ có tập nghiệm là

(A) $(-\infty ; -3)$ ; (B) $(-3 ; 2)$ ; (C) $(2 ; +\infty)$ ; (D) $(-3 ; +\infty)$.

**4.112.** Hệ bất phương trình $\begin{cases} (x + 3)(4 - x) > 0 \\ x < m - 1 \end{cases}$ có nghiệm khi

(A) $m < 5$ ; (B) $m > -2$ ; (C) $m = 5$ ; (D) $m > 5$.

**4.113.** Hệ bất phương trình $\begin{cases} x^2 - 1 \leq 0 \\ x - m > 0 \end{cases}$ có nghiệm khi

(A) $m > 1$ ; (B) $m = 1$ ; (C) $m < 1$ ; (D) $m \neq 1$.

**4.114.** Hệ bất phương trình $\begin{cases} x^2 - 4x + 3 > 0 \\ x^2 - 6x + 8 > 0 \end{cases}$ có tập nghiệm là

(A) $(-\infty ; 1) \cup (3 ; +\infty)$ ; (B) $(-\infty ; 1) \cup (4 ; +\infty)$ ;

(C) $(-\infty ; 2) \cup (3 ; +\infty)$ ; (D) $(1 ; 4)$.

**4.115.** Hãy ghép mỗi dòng ở cột trái với một dòng ở cột phải trong bảng sau để được một khẳng định đúng :

| | |
|---|---|
| a) $x^2 - 5x + 6 > 0 \Leftrightarrow$ | (1) $2 \leq x \leq 3$ |
| b) $x^2 - 5x + 6 \leq 0 \Leftrightarrow$ | (2) $x \geq 3$ hoặc $x \leq 2$ |
| c) $x^2 - 5x + 6 < 0 \Leftrightarrow$ | (3) $2 < x < 3$ |
| d) $x^2 - 5x + 6 \geq 0 \Leftrightarrow$ | (4) $x > 3$ hoặc $x < 2$ |
| | (5) $2 < x \leq 3$ |

**4.116.** Điền dấu ($>, \geq, <, \leq$) thích hợp vào ô trống.

Cho tam thức $f(x) = x^2 + 2mx + m^2 - m + 2$ ($m$ là tham số).

a) $f(x) > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ khi $m \square 2$ ;

b) $f(x) \geq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ khi $m \square 2$ ;

c) Tồn tại $x$ để $f(x) < 0$ khi $m \square 2$ ;

d) Tồn tại $x$ để $f(x) \leq 0$ khi $m \square 2$.

## C. HƯỚNG DẪN – LỜI GIẢI – ĐÁP SỐ

**4.1.** a) $a^2 + b^2 - ab = \left(a - \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3b^2}{4} \geq 0$ với mọi $a, b \in \mathbb{R}$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} \left(a - \frac{b}{2}\right)^2 = 0 \\ \frac{3b^2}{4} = 0 \end{cases}$ hay $a = b = 0$.

b) $a^3 - b^3 - (ab^2 - a^2b) = a(a^2 - b^2) + b(a^2 - b^2)$

$$= (a + b)(a^2 - b^2)$$

$$= (a - b)(a + b)^2$$

Do $a \geq b$ nên $(a - b)(a + b)^2 \geq 0$, ta có điều phải chứng minh.

**4.2.** a) $a^4 + b^4 - a^3b - ab^3 = a^3(a - b) + b^3(b - a) = (a - b)(a^3 - b^3)$

$$= (a - b)^2(a^2 + b^2 + ab) \geq 0\,.$$

(Vì $a^2 + b^2 + ab = \left(a + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3b^2}{4} \geq 0$ và $(a - b)^2 \geq 0$ với mọi $a, b \in \mathbb{R}$)

b) $(a + b + c)^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2)$ (1)

$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc \leq 3a^2 + 3b^2 + 3c^2$

$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc \geq 0$

$\Leftrightarrow (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \geq 0\,.$ (2)

Bất đẳng thức (2) luôn đúng nên bất đẳng thức (1) được chứng minh.

**4.3.** Ta có $\frac{a + c}{b + c} - \frac{a}{b} = \frac{c(b - a)}{b(b + c)}$.

a) Nếu $0 < a < b$ và $c > 0$ thì $\frac{c(b - a)}{b(b + c)} > 0$. Suy ra $\frac{a}{b} < \frac{a + c}{b + c}$.

b) Nếu $a > b > 0$ và $c > 0$ thì $\frac{c(b - a)}{b(b + c)} < 0$. Suy ra $\frac{a}{b} > \frac{a + c}{b + c}$.

**4.4.** a) Từ $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ suy ra $\frac{a}{b} + 1 < \frac{c}{d} + 1$, tức là $\frac{a+b}{b} < \frac{c+d}{d}$.

b) Từ $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ và $a$, $b$, $c$, $d$ là bốn số dương nên $\frac{b}{a} > \frac{d}{c}$, suy ra $\frac{b}{a} + 1 > \frac{d}{c} + 1$, tức là $\frac{b+a}{a} > \frac{d+c}{c}$.

**4.5.** Từ $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ và $b$, $d$ là hai số dương, suy ra $ad < bc$ hay $ad - bc < 0$ ; $bc - ad > 0$.

Ta có $\frac{a+c}{b+d} - \frac{a}{b} = \frac{bc - ad}{(b+d)b} > 0$ ; $\frac{a+c}{b+d} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{(b+d)d} < 0$.

Vậy $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$.

**4.6.** Do $a$, $b$, $c$, $d$ là các số dương nên
$$\frac{a}{a+b+c} > \frac{a}{a+b+c+d}$$
$$\frac{b}{b+c+d} > \frac{b}{a+b+c+d}$$
$$\frac{c}{c+d+a} > \frac{c}{a+b+c+d}$$
$$\frac{d}{d+a+b} > \frac{d}{a+b+c+d}.$$

Cộng vế với vế của các bất đẳng thức trên, ta suy ra
$$\frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{b+c+d} + \frac{c}{c+d+a} + \frac{d}{d+a+b} > 1.$$

Lại có $\frac{a}{a+b+c} < \frac{a}{a+c}$ ; $\frac{c}{c+d+a} < \frac{c}{a+c}$

nên $\frac{a}{a+b+c} + \frac{c}{c+d+a} < 1$.

Tương tự $\frac{b}{b+c+d} + \frac{d}{d+a+b} < 1$. Từ đó suy ra
$$\frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{b+c+d} + \frac{c}{c+d+a} + \frac{d}{d+a+b} < 2.$$

**4.7.** Nếu $x \geq 0$ thì $x^n + 1 \geq 1 > 0$.

Nếu $-1 \leq x < 0$ thì $|x| \leq 1$ suy ra $|x|^n \leq 1$ hay $|x^n| \leq 1$.

Từ đó ta có $-x^n \leq 1$ (vì $-x^n \leq |x^n|$). Vì vậy $x^n + 1 \geq 0$.

**4.8.** a) Áp dụng mối liên hệ giữa cạnh và góc trong tam giác, ta có :

Nếu $a \geq b$ thì $A \geq B$ ;

Nếu $a \leq b$ thì $A \leq B$ ;

Vì vậy luôn có $(a - b)(A - B) \geq 0$, đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b$ $(A = B)$, tức là tam giác $ABC$ cân tại $C$.

b) • Theo câu a) ta có

$$(a - b)(A - B) + (b - c)(B - C) + (c - a)(C - A) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow aA + bB + cC - bA - aB + bB - cB - bC + cC - aC - cA + aA \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 3(aA + bB + cC) - (a + b + c)(A + B + C) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{aA + bB + cC}{a + b + c} \geq \frac{A + B + C}{3} = 60^\circ$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $A = B = C$, tức là tam giác $ABC$ là tam giác đều.

• Lại có $a + b > c$ ; $b + c > a$ ; $c + a > b$ nên

$$aA + bB + cC < (b + c)A + (c + a)B + (a + b)C$$

$$\Leftrightarrow \quad 2(aA + bB + cC) < (A + B + C)(a + b + c).$$

Từ đó suy ra $\dfrac{aA + bB + cC}{a + b + c} < 90^\circ$.

**4.9.** a) Ta có : $\dfrac{1}{(k+1)\sqrt{k}} = \dfrac{\sqrt{k}}{(k+1)k} = \sqrt{k}\left(\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}\right)$

$$= \sqrt{k}\left(\frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)$$

$$= \left(1 + \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k+1}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}\right) < 2\left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}\right).$$

b) $$\frac{1}{2}+\frac{1}{3\sqrt{2}}+\frac{1}{4\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}} < 2\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\ldots+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) = 2\left(1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) < 2.$$

**4.10.** a) Với $k > 1$ ta có : $\frac{1}{k^3} < \frac{1}{k^2} < \frac{1}{(k-1)k} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$.

b) $$\frac{1}{1^3}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\ldots+\frac{1}{n^3} < 1+1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}$$

$$= 2-\frac{1}{n} < 2.$$

**4.11.** a) $f(x) = (x-a)^2 + (x-b)^2 = 2x^2 - 2(a+b)x + a^2 + b^2$

$$= 2\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2 + \frac{(a-b)^2}{2}.$$

Ta có $f(x) \geq \frac{(a-b)^2}{2}$ với mọi $a$, $b$ ; đẳng thức xảy ra khi $\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2 = 0$, tức là $x = \frac{a+b}{2}$ Vậy $f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất là $\frac{(a-b)^2}{2}$ tại $x = \frac{a+b}{2}$.

*Chú ý*. Tránh sai lầm khi suy luận rằng $(x-a)^2 + (x-b)^2 \geq 0$ với mọi $x$ nên giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ là 0.

b) *Hướng dẫn*. Viết $g(x)$ dưới dạng

$$3\left(x-\frac{a+b+c}{3}\right)^2 + \frac{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}{3}$$

**4.12.** a) $|a| + |b| = |a| + |-b| \geq |a-b|$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $ab \leq 0$.

b) *Hướng dẫn*. $|a+b+c| \leq |a+b| + |c|$.

**4.13.** $|a-b| + |b-c| \geq |a-b+b-c| = |a-c|$.

**4.14.** $f(x) = |x - 2006| + |x - 2007| \geq |x - 2006 - (x - 2007)| = 1$.

Đẳng thức xảy ra chẳng hạn khi $x = 2006$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ là 1.

**4.15.** a) Với $x \geq 0$ thì hiển nhiên $x + |x| \geq 0$.

Với $x < 0$ thì $x + |x| = x - x = 0$.

b) $x + \sqrt{x^2 - x + 1} = x + \sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \geq \left(x - \frac{1}{2}\right) + \left|x - \frac{1}{2}\right| \geq 0$.

Vậy $\sqrt{x + \sqrt{x^2 - x + 1}}$ xác định với mọi $x$.

**4.16.** Bạn An giải như vậy là sai.

Sai lầm của bạn An là không để ý điều kiện của các số $a$, $b$ trong bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân $\frac{a + b}{2} \geq \sqrt{ab}$ là $a \geq 0$, $b \geq 0$. Trong bài này $x$ và $1 - x$ chỉ không âm khi $x \in [0 ; 1]$.

Lời giải đúng là :

$x(1 - x) \leq \frac{1}{4} \Leftrightarrow -x^2 + x \leq \frac{1}{4} \Leftrightarrow x^2 - x + \frac{1}{4} \geq 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$, bất đẳng thức này hiển nhiên đúng với mọi $x$.

**4.17.** a) Với $a \geq 0$, $b \geq 0$ ta có

$$a + b \geq 2\sqrt{ab} \geq 0; ab + 1 \geq 2\sqrt{ab} \geq 0.$$

Từ đó suy ra $(a + b)(ab + 1) \geq 2\sqrt{ab}.2\sqrt{ab} = 4ab$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = 1$.

b) Với $a \geq 0$, $b \geq 0$, $c \geq 0$, ta có

$$a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc} \geq 0 \; ; \qquad ab + bc + ca \geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} \geq 0.$$

Từ đó suy ra

$$(a + b + c)(ab + bc + ca) \geq 3\sqrt[3]{abc}\,.3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} = 9abc.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

**4.18.** Với $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ thì

$$1 + \frac{a}{b} \geq 2\sqrt{\frac{a}{b}} \geq 0\,; \quad 1 + \frac{b}{c} \geq 2\sqrt{\frac{b}{c}} \geq 0\,; \quad 1 + \frac{c}{a} \geq 2\sqrt{\frac{c}{a}} \geq 0.$$

Từ đó suy ra $\left(1 + \frac{a}{b}\right)\left(1 + \frac{b}{c}\right)\left(1 + \frac{c}{a}\right) \geq 2^3\sqrt{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{a}} = 8.$

**4.19.** Do $0 < a < b$ nên $\frac{a}{b} < 1$ suy ra

$$a\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = 1 + \frac{a}{b} < 2 \text{ tức là } a < \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}. \qquad (1)$$

Lại có $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} > 2\sqrt{\frac{1}{ab}}$ nên $\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} < \sqrt{ab}.$ (2)

Do $0 < a < b$ nên $\sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} < b.$ (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra điều cần chứng minh.

**4.20.** a) $x^2 + \frac{16}{x^2} \geq 2\sqrt{x^2.\frac{16}{x^2}} = 8$. Đẳng thức xảy ra khi $x = \pm 2$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ là 8 khi $x = \pm 2$.

b) Do $0 < x < 1$ nên $1 - x > 0$. Ta có $\frac{1}{x} = \frac{1-x}{x} + 1$ ; $\frac{2}{1-x} = \frac{2x}{1-x} + 2$;

$$\frac{1}{x} + \frac{2}{1-x} = \frac{1-x}{x} + \frac{2x}{1-x} + 3 \geq 2\sqrt{\frac{1-x}{x}\cdot\frac{2x}{1-x}} + 3 = 2\sqrt{2} + 3.$$

Đẳng thức xảy ra khi $\frac{1-x}{x} = \frac{2x}{1-x}$ và $0 < x < 1$ tức là $x = -1 + \sqrt{2}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $g(x)$ là $2\sqrt{2} + 3$ khi $x = -1 + \sqrt{2}$.

**4.21.** Do $0 \leq x \leq \frac{a}{2}$ nên $a - 2x \geq 0$. Ta có

$$x(a-2x)^2 = \frac{1}{4}.4x.(a-2x)(a-2x) \leq \frac{1}{4}.\left(\frac{4x + a - 2x + a - 2x}{3}\right)^3$$

$$= \frac{1}{4}.\left(\frac{2a}{3}\right)^3 = \frac{2a^3}{27}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $4x = a - 2x$, tức là $x = \frac{a}{6}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $y$ là $\frac{2a^3}{27}$ khi và chỉ khi $x = \frac{a}{6}$.

**4.22.** Gọi cạnh hình vuông được cắt là $x$ ($0 < x < 25$, đơn vị : xentimét)

Thể tích $V$ của cái hộp là

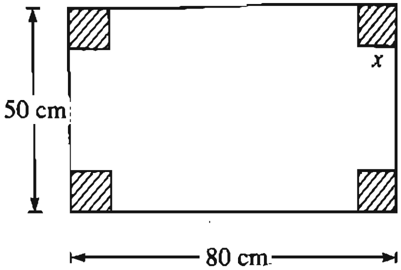
$V = x(80 - 2x)(50 - 2x)$.

Khi đó ta có

$12V = 6x(80 - 2x)(100 - 4x)$

$\leq \left(\frac{6x + 80 - 2x + 100 - 4x}{3}\right)^3 = 60^3$

Suy ra $V \leq \frac{60^3}{12}$ hay $V \leq 18\,000$.



*Hình 4.1*

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $6x = 80 - 2x = 100 - 4x$ tức là $x = 10$.

Giá trị lớn nhất của $V$ là 18000 $\text{cm}^3$ khi $x = 10$(cm).

Vậy phải cắt đi ở bốn góc vuông của hình chữ nhật ban đầu những hình vuông có cạnh 10 cm.

*Nhận xét.* Nếu xét $4V = 4x(80 - 2x)(50 - 2x)$ thì $4V$ là tích của ba thừa số có tổng không đổi (bằng 130), ta vẫn có bất đẳng thức $4V \leq \left(\frac{130}{3}\right)^3$ nhưng đẳng thức không thể xảy ra và không có giá trị nào của $x$ thoả mãn

$$80 - 2x = 50 - 2x.$$

**4.23.** *Hướng dẫn.* Áp dụng bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-xki.

**4.24.** Đặt $b + c = x$, $c + a = y$ ; $a + b = z$. Do $a$, $b$, $c$ dương nên $x$, $y$, $z$ dương và

$a = \frac{-x + y + z}{2}$ ; $b = \frac{x - y + z}{2}$ ; $c = \frac{x + y - z}{2}$. Khi đó ta có

$$A = \frac{-x+y+z}{2x} + \frac{x-y+z}{2y} + \frac{x+y-z}{2z} = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \frac{x}{z} + \frac{z}{x} + \frac{y}{z} + \frac{z}{y} - 3\right)$$

$$\geq \frac{1}{2}\cdot(2.3 - 3) = \frac{3}{2}.$$

Học sinh tự giải tiếp.

**4.25.** (h. 4.2) Ta có

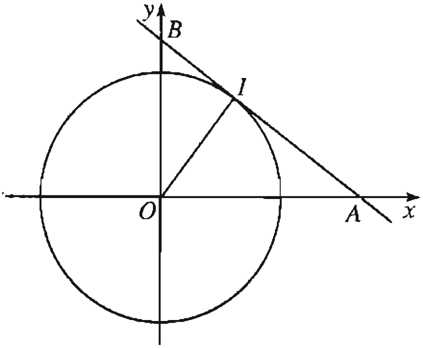
$$S_{OAB} = \frac{1}{2}OI.AB = \frac{R}{2}.AB\,;$$

$$AB = IA + IB \geq 2\sqrt{IA.IB} = 2\sqrt{OI^2} = 2R\,;$$

$AB = 2R \Leftrightarrow IA = IB = R$. Lúc đó tam giác $OAB$ vuông cân tại $O$, cạnh huyền $AB = 2R$.

$$OA = OB = R\sqrt{2}.$$

Suy ra $\quad S_{OAB} \geq \frac{R}{2}\cdot 2R = R^2.$



*Hình 4.2*

Vậy $S_{OAB}$ nhỏ nhất bằng $R^2$ khi $OA = OB = R\sqrt{2}$ Khi đó toạ độ $A(R\sqrt{2}\,;0)$ và $B(0\,;R\sqrt{2})$.

**4.26.** a) Đúng, vì $2^2 + 2 + 1 > 0$.

b) Sai, vì $(-3)^3 - 3.(-3) - 1 < 0$ nên $-3$ là nghiệm của bất phương trình đã cho.

c) Sai, vì $a^2 + (1 + a)a - a + 2 = 2a^2 + 2 > 0$.

**4.27.** a) Không tương đương, vì $x = 2$ là nghiệm của bất phương trình thứ nhất nhưng không thuộc tập xác định của bất phương trình thứ hai.

b) Tương đương.

c) Không tương đương, vì $x = 0$ là nghiệm của bất phương trình thứ nhất nhưng không là nghiệm của bất phương trình thứ hai.

d) Tương đương, vì khi $x - 3 > 0$ thì $x^2 > 0$ nên $x - 3 > 0 \Leftrightarrow x^2(x - 3) > 0$.

e) Không tương đương vì $x = -1$ là nghiệm của bất phương trình thứ hai nhưng không là nghiệm của bất phương trình thứ nhất.

g) Tương đương, vì $x^2 - 2x + 2 = (x - 1)^2 + 1 > 0$ với mọi $x$.

**4.28.** a) Điều kiện : $x = 2$, tập nghiệm $S = \{2\}$.

b) Điều kiện : $x \geq \frac{3}{2}$, tập nghiệm $S = \left[\frac{3}{2}\,; +\infty\right)$.

c) Điều kiện : $x > 3$, tập nghiệm $S = \varnothing$.

d) Điều kiện : $x \neq 2$, tập nghiệm $S = \left[\frac{2}{3}\,; 2\right) \cup (2\,; +\infty)$.

**4.29.** a) Vế trái luôn dương với mọi $x \geq 2$.

b) Vế trái không âm với mọi $x$.

c) Giản ước cả hai vế cho $x^2 + (x-3)^2$ dẫn đến $2 > 5$. Điều này vô lí.

d) Do $\sqrt{1+2(x+1)^2} \geq 1$ và $\sqrt{10-6x+x^2} = \sqrt{1+(x-3)^2} \geq 1$.

**4.30.** a) Vế trái luôn dương với mọi $x$.

b) Vế trái không âm với mọi $x$.

c) Giản ước cả hai vế cho $x^2$ Vế trái của bất đẳng thức mới nhận được luôn dương.

**4.31.** a) $x \neq -1$ ; $x \neq 3$.

b) $x > 1$ ; $x \neq 2$ ; $x \neq 3$ ; $x \neq 4$.

**4.32.** Sai lầm của bạn Nam là không để ý đến điều kiện xác định của phương trình $D = [2 ; +\infty)$. Hai vế của (1) chỉ không âm khi $x \in D$ chứ không phải với mọi $x \in \mathbb{R}$. Vì vậy, khi tìm ra $x < 1$ cần phải đối chiếu với điều kiện $x \in [2 ; +\infty)$ để kết luận bất phương trình (1) vô nghiệm.

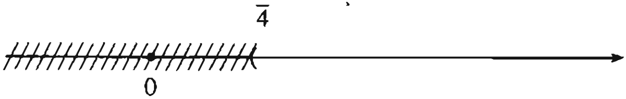
**4.33.** Sai lầm của bạn Minh là nghĩ rằng $\frac{1}{a} < \frac{1}{b} \Leftrightarrow b < a$. Nhớ rằng

$$\frac{1}{a} < \frac{1}{b} \Leftrightarrow \frac{a-b}{ab} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} ab > 0 \\ a > b \end{cases} \text{hoặc} \begin{cases} ab < 0 \\ a < b \end{cases}$$

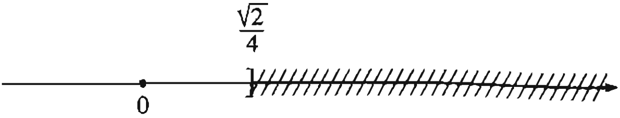
Nhận thấy nếu $x + 5 < 0$ thì (1) vô nghiệm, ngược lại ta có

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x + 5 < \sqrt{x^2 - 2x - 3} \\ x + 5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -\dfrac{7}{3} \\ x > -5 \end{cases} \Leftrightarrow -5 < x < -\frac{7}{3}.$$

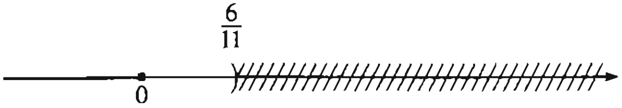
**4.34.** a) $S = \left(\frac{9}{4} ; +\infty\right)$



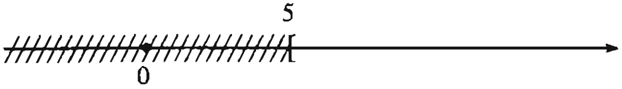
b) $S = \left(-\infty ; \frac{\sqrt{2}}{4}\right]$



c) $S = \left(-\infty\ ;\ \dfrac{6}{11}\right)$



d) $[5\ ;\ +\infty)$.



**4.35.** a) $S = [-3\ ;\ -2]$. Bất phương trình đã cho tương đương với hệ

$$\begin{cases} x+3 \ge 0 \\ x+4 \ge 0 \\ x+2 \le 0 \end{cases} \text{ tức là } \begin{cases} x \ge -3 \\ x \ge -4 \\ x \le -2 \end{cases} \text{ hay } -3 \le x \le -2.$$

b) $S = (-\infty\ ;\ -4) \cup (-3\ ;\ -2)$.

c) $\sqrt{(x-1)^2(x-2)} \ge 0.$ (1)

- Nếu $x = 1$ thì bất phương trình (1) được nghiệm đúng.
- Nếu $x \ne 1$ thì (1) tương đương với $x - 2 \ge 0$, tức là $x \ge 2$.

Vậy tập nghiệm của (1) là $S = \{1\} \cup [2\ ;\ +\infty)$.

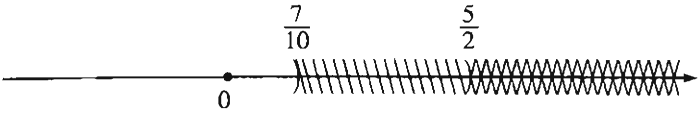
d) $\sqrt{2x-8} - \sqrt{4x-21} > 0 \Leftrightarrow \sqrt{2x-8} > \sqrt{4x-21}$.

Điều kiện : $x \ge \dfrac{21}{4}$, khi đó ta có $2x - 8 > 4x - 21$, tức là $x < \dfrac{13}{2}$.

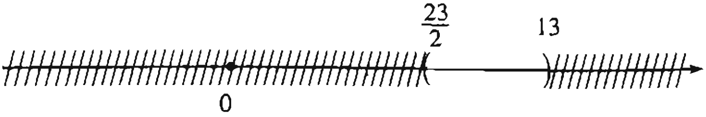
Kết hợp với điều kiện trên dẫn đến $\dfrac{21}{4} \le x < \dfrac{13}{2}$. Vậy tập nghiệm $S = \left[\dfrac{21}{4}\ ;\ \dfrac{13}{2}\right)$.

**4.36.** a) $$\begin{cases} 3x + \dfrac{3}{5} < x + 2 \\ \dfrac{6x-3}{2} < 2x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x < \dfrac{7}{5} \\ x < 1 + \dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \dfrac{7}{10} \\ x < \dfrac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x < \dfrac{7}{10}.$$

Biểu diễn tập nghiệm $S = \left(-\infty\ ;\ \dfrac{7}{10}\right)$ trên trục số (phần không bị gạch)



b) $S = \left(\dfrac{23}{2} ; 13\right)$.



**4.37.** a) Ta có $mx \geq m^2$ (1)

Nếu $m > 0$ thì (1) $\Leftrightarrow x \geq m$ ; tập nghiệm $S = [m ; +\infty)$.

Nếu $m = 0$ thì (1) $\Leftrightarrow 0.x \geq 0$ ; tập nghiệm $S = \mathbb{R}$.

Nếu $m < 0$ thì (1) $\Leftrightarrow x \leq m$ ; tập nghiệm $S = (-\infty ; m]$.

b) Biến đổi về dạng $(m - 1)x > m + 2$. (2)

Nếu $m > 1$ thì (2) $\Leftrightarrow x > \dfrac{m+2}{m-1}$. tập nghiệm $S = \left(\dfrac{m+2}{m-1} ; +\infty\right)$.

Nếu $m = 1$ thì (2) $\Leftrightarrow 0.x > 3$, tập nghiệm $S = \varnothing$.

Nếu $m < 1$ thì (2) $\Leftrightarrow x < \dfrac{m+2}{m-1}$. tập nghiệm $S = \left(-\infty ; \dfrac{m+2}{m-1}\right)$.

c) Biến đổi về dạng

$$\left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}\right).x \leq (ab + bc + ca)\left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}\right).$$

Nếu $\dfrac{1}{a+b} + \dfrac{1}{b+c} + \dfrac{1}{c+a} > 0$ thì tập nghiệm $S = (-\infty ; ab + bc + ca]$.

Nếu $\dfrac{1}{a+b} + \dfrac{1}{b+c} + \dfrac{1}{c+a} = 0$ thì tập nghiệm $S = \mathbb{R}$.

Nếu $\dfrac{1}{a+b} + \dfrac{1}{b+c} + \dfrac{1}{c+a} < 0$ thì tập nghiệm $S = [ab + bc + ca ; +\infty)$.

d) Biến đổi về dạng $x(a + b) < a - b$.

Nếu $a + b > 0$ thì $S = \left(-\infty ; \dfrac{a-b}{a+b}\right)$.

Nếu $a + b < 0$ thì $S = \left(\dfrac{a-b}{a+b} ; +\infty\right)$.

Nếu $a + b = 0$ và $a > b$ thì $S = \mathbb{R}$.

Nếu $a + b = 0$ và $a \leq b$ thì $S = \varnothing$.

**4.38.** Nhận thấy rằng $x = -1$ là nghiệm của bất phương trình (1). Do đó bạn Nam giải sai. Sai lầm của bạn Nam ở chỗ :

Từ $$\text{(I)} \begin{cases} x^2 - 1 \geq 0 \\ x + 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \text{(II)} \begin{cases} x - 1 \geq 0 \\ x + 1 \geq 0. \end{cases}$$

(thấy ngay $x = -1$ là nghiệm của (I) nhưng không là nghiệm của (II)). Suy luận đúng là

$$\begin{cases} AB \geq 0 \\ A \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow A = 0 \text{ hoặc } \begin{cases} B \geq 0 \\ A > 0 \end{cases}$$

**4.39.** Ta có

$$\text{(I)} \begin{cases} x + 4m^2 \leq 2mx + 1 \\ 3x + 2 > 2x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1 - 2m)x \leq 1 - 4m^2 & (1) \\ x > -3. & (2) \end{cases}$$

Nếu $m < \frac{1}{2}$ thì (1) $\Leftrightarrow x \leq 1 + 2m$, nên hệ (I) có nghiệm khi $-3 < 1 + 2m$, hay $m > -2$. Kết hợp với điều kiện $m < \frac{1}{2}$, ta có $-2 < m < \frac{1}{2}$.

Nếu $m = \frac{1}{2}$ thì (1) có dạng $0.x \leq 0$ (luôn đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$), nên hệ (I) luôn có nghiệm $x > -3$.

Nếu $m > \frac{1}{2}$ thì (1) $\Leftrightarrow$ $x \geq 1 + 2m$, nên hệ (I) luôn có nghiệm $x \geq 1 + 2m$.

Vậy khi $m > -2$ thì hệ (I) luôn có nghiệm.

**4.40.** Hệ vô nghiệm khi $-2 \leq m \leq 3$.

**4.41.** a) Học sinh tự lập bảng xét dấu

$$(3x - 1)(x + 2) > 0 \text{ khi } x < -2 \text{ hoặc } x > \frac{1}{3}\ ;$$

$$(3x - 1)(x + 2) < 0 \text{ khi } -2 < x < \frac{1}{3}.$$

b) $\frac{2 - 3x}{5x - 1} > 0$ khi $\frac{1}{5} < x < \frac{2}{3}$ ; $\frac{2 - 3x}{5x - 1} < 0$ khi $x < \frac{1}{5}$ hoặc $x > \frac{2}{3}$.

c) Lập bảng sau :

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $-\frac{1}{3}$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-x+1$ | | $+$ | | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $x+2$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | | $+$ | |
| $3x+1$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $(-x+1)(x+2)(3x+1)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

Vậy $(-x+1)(x+2)(3x+1) < 0$ khi $-2 < x < -\frac{1}{3}$ hoặc $x > 1$ ;

$(-x+1)(x+2)(3x+1) > 0$ khi $x < -2$ hoặc $-\frac{1}{3} < x < 1$.

d) Ta có $2 - \frac{2+x}{3x-2} = \frac{5x-6}{3x-2}$. Lập bảng sau :

| $x$ | $-\infty$ | | $\frac{2}{3}$ | | $\frac{6}{5}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $5x-6$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $3x-2$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $\frac{5x-6}{3x-2}$ | | $+$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |

Vậy $2 - \frac{2+x}{3x-2} < 0$ khi $\frac{2}{3} < x < \frac{6}{5}$ ; $2 - \frac{2+x}{3x-2} > 0$ khi $x < \frac{2}{3}$ hoặc $x > \frac{6}{5}$.

**4.42.** a) $9x^2 - 1 = (3x+1)(3x-1)$. Học sinh tự lập bảng xét dấu và nhận được

$9x^2 - 1 < 0$ khi $-\frac{1}{3} < x < \frac{1}{3}$ ; $9x^2 - 1 > 0$ khi $x < -\frac{1}{3}$ hoặc $x > \frac{1}{3}$.

b) $-x^3 + 7x - 6 = -(x-1)(x-2)(x+3)$. Học sinh tự lập bảng xét dấu và nhận được

$-x^3 + 7x - 6 < 0$ khi $-3 < x < 1$ hoặc $x > 2$ ;

$-x^3 + 7x - 6 > 0$ khi $x < -3$ hoặc $1 < x < 2$.

c) $x^3 + x^2 - 5x + 3 = (x - 1)^2(x + 3)$.

$x^3 + x^2 - 5x + 3 < 0$ khi $x < -3$ ; $x^3 + x^2 - 5x + 3 > 0$ khi $x > -3$ và $x \neq 1$.

d) $x^2 - x - 2\sqrt{2} = \left(x - \dfrac{1 - \sqrt{1 + 8\sqrt{2}}}{2}\right)\left(x - \dfrac{1 + \sqrt{1 + 8\sqrt{2}}}{2}\right)$ ;

$x^2 - x - 2\sqrt{2} < 0$ khi $\dfrac{1 - \sqrt{1 + 8\sqrt{2}}}{2} < x < \dfrac{1 + \sqrt{1 + 8\sqrt{2}}}{2}$ ;

$x^2 - x - 2\sqrt{2} > 0$ khi $x < \dfrac{1 - \sqrt{1 + 8\sqrt{2}}}{2}$ hoặc $x > \dfrac{1 + \sqrt{1 + 8\sqrt{2}}}{2}$.

**4.43.** a) Biến đổi biểu thức về dạng $\dfrac{2x}{(3 - x)(3 + x)}$ Học sinh tự lập bảng xét dấu. Kết quả được biểu thức dương khi $x < -3$ hoặc $0 < x < 3$ ; biểu thức âm khi $-3 < x < 0$ hoặc $x > 3$.

b) $\dfrac{x^2 - 6x + 8}{x^2 + 8x - 9} = \dfrac{(x - 2)(x - 4)}{(x - 1)(x + 9)}$. Lập bảng xét dấu sau :

| $x$ | $-\infty$ | | $-9$ | | $1$ | | $2$ | | $4$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x - 2$ | | $-$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $x - 4$ | | $-$ | | $-$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $x - 1$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | | $+$ | |
| $x + 9$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | | $+$ | | $+$ | |
| $\dfrac{(x - 2)(x - 4)}{(x - 1)(x + 9)}$ | | $+$ | $\|$ | $-$ | $\|$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

Vậy $\dfrac{x^2 - 6x + 8}{x^2 + 8x - 9} < 0$ khi $x \in (-9 ; 1) \cup (2 ; 4)$ ;

$\dfrac{x^2 - 6x + 8}{x^2 + 8x - 9} > 0$ khi $x \in (-\infty ; -9) \cup (1 ; 2) \cup (4 ; +\infty)$.

c) Biến đổi biểu thức về dạng $\dfrac{(x + 2)^2}{x^2(x^2 - 2)}$ Từ đó, biểu thức đã cho sẽ dương khi $x \in (-\infty ; -2) \cup (-2 ; -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2} ; +\infty)$ và sẽ âm khi $x \in (-\sqrt{2} ; 0) \cup (0 ; \sqrt{2})$.

d) Ta có $\dfrac{|x+1|-1}{x^2+x+1} = \begin{cases} \dfrac{x}{x^2+x+1} & \text{khi } x \geq -1 \\ \dfrac{-x-2}{x^2+x+1} & \text{khi } x < -1. \end{cases}$

Dấu của biểu thức trên hoàn toàn phụ thuộc vào dấu của tử thức (vì $x^2 + x + 1 > 0$ với mọi $x$). Vì vậy :

$$\frac{|x+1|-1}{x^2+x+1} < 0 \text{ khi } x \in (-2\,;\,0)$$

và $$\frac{|x+1|-1}{x^2+x+1} > 0 \text{ khi } x \in (-\infty\,;\,-2) \cup (0\,;\,+\infty).$$

**4.44.** a) Tập nghiệm $S = (-\infty\,;\,-1) \cup \left(\sqrt{2}\,;\,\dfrac{3}{2}\right)$.

b) Biến đổi bất phương trình về dạng $\dfrac{5x+4}{3x+1} \leq 0$.

Tập nghiệm $S = \left[-\dfrac{4}{5}\,;\,-\dfrac{1}{3}\right)$.

**4.45.** a) Dựa vào tính chất $|a| + |b| = |a - b| \Leftrightarrow ab \leq 0$,

và để ý rằng $(5 + x) - (x - 3) = 8$ ta có

$$|5 + x| + |x - 3| = 8 \Leftrightarrow (5 + x)(x - 3) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow -5 \leq x \leq 3.$$

*Chú ý.* Học sinh có thể giải bằng cách chia thành các khoảng để phá dấu giá trị tuyệt đối nhưng lời giải sẽ dài hơn.

b) Dựa vào tính chất $|a| = a \Leftrightarrow a \geq 0$, ta có

$$|x^2 - 5x + 6| = x^2 - 5x + 6 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 2 \text{ hoặc } x \geq 3.$$

c) Ta có $|2x-1| = \begin{cases} 2x - 1 \text{ khi } x \geq \dfrac{1}{2} \\ 1 - 2x \text{ khi } x < \dfrac{1}{2}. \end{cases}$

Nếu $x \ge \frac{1}{2}$ thì $|2x-1| = x+2 \Leftrightarrow 2x-1 = x+2 \Leftrightarrow x = 3$ (thoả mãn điều kiện $x \ge \frac{1}{2}$).

Nếu $x < \frac{1}{2}$ thì $|2x-1| = x+2 \Leftrightarrow 1-2x = x+2 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}$ (thoả mãn điều kiện $x < \frac{1}{2}$).

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{-\frac{1}{3}\,;\,3\right\}$

d) Tập nghiệm $S = \{-3\,;\,2\}$.

**4.46.** a) $|3x-5| < 2 \Leftrightarrow -2 < 3x-5 < 2 \Leftrightarrow 1 < x < \frac{7}{3}$.

b) $\left|\frac{2-x}{x+1}\right| \ge 2 \Leftrightarrow \frac{2-x}{x+1} \ge 2$ hoặc $\frac{2-x}{x+1} \le -2$.

- Trường hợp $\frac{2-x}{x+1} \ge 2 \Leftrightarrow \frac{-3x}{x+1} \ge 0 \Leftrightarrow -1 < x \le 0$.
- Trường hợp $\frac{2-x}{x+1} \le -2 \Leftrightarrow \frac{4+x}{x+1} \le 0 \Leftrightarrow -4 \le x < -1$.

Vậy tập nghiệm $S = (-4\,;\,-1) \cup (-1\,;\,0]$.

c) Phân chia hai trường hợp $x \ge 2$ và $x < 2$.

Tập nghiệm $S = \left(-\infty\,;\,\frac{5}{3}\right)$.

d) Ta có

$$|x+1| = \begin{cases} x+1 & \text{khi } x \ge -1 \\ -x-1 & \text{khi } x < -1\,; \end{cases} \qquad |x| = \begin{cases} x & \text{khi } x \ge 0 \\ -x & \text{khi } x < 0. \end{cases}$$

Gọi bất phương trình đã cho là (1).

- Nếu $x < -1$ thì

(1) $\Leftrightarrow -x-1 \le -x-x+2 \Leftrightarrow x \le 3$.

Kết hợp với điều kiện $x < -1$, ta được $x < -1$.

- Nếu $-1 \le x < 0$ thì

(1) $\Leftrightarrow x+1 \le -x-x+2 \Leftrightarrow x \le \frac{1}{3}$

Kết hợp với điều kiện $-1 \le x < 0$, ta được $-1 \le x \le 0$.

- Nếu $x \geq 0$ thì

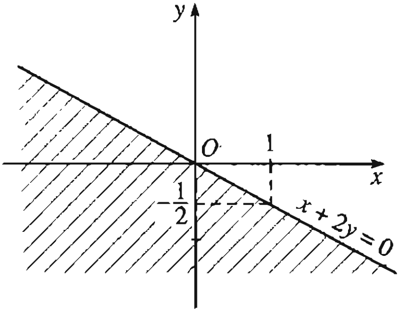
(1) $\Leftrightarrow x + 1 \leq x - x + 2 \Leftrightarrow x \leq 1$.

Kết hợp với điều kiện $x \geq 0$, ta được $0 \leq x \leq 1$.

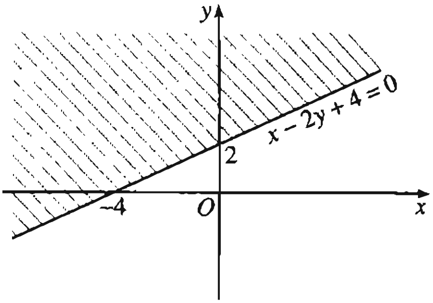
Vậy tập nghiệm của (1) là $S = (-\infty ; 1]$.

**4.47.** a) $2(x + y + 1) > x + 2 \Leftrightarrow x + 2y > 0$.

Miền nghiệm của bất phương trình là nửa mặt phẳng (phần không bị gạch, không kể bờ) trong hình 4.3.



*Hình 4.3*

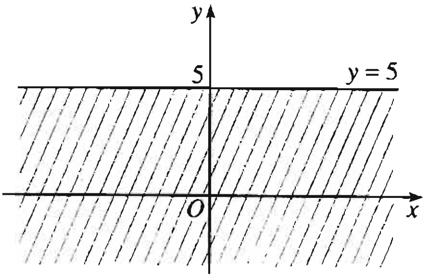


*Hình 4.4*

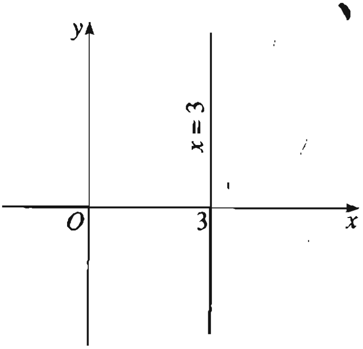
b) $2(y + x) \leq 3(x + 1) + 1 \Leftrightarrow x - 2y + 4 \geq 0$.

Miền nghiệm của bất phương trình là nửa mặt phẳng (phần không bị gạch kể cả bờ) trong hình 4.4.

c) Miền nghiệm là nửa mặt phẳng (phần không bị gạch, không kể bờ) trong hình 4.5.



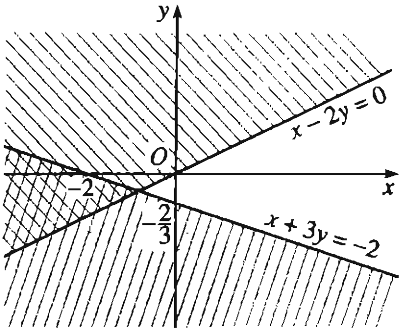
*Hình 4.5*



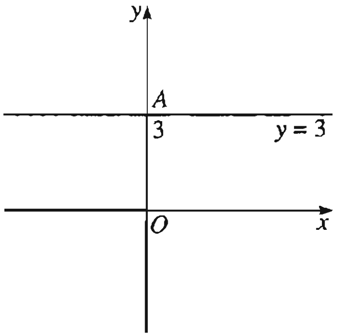
*Hình 4.6*

d) Miền nghiệm là nửa mặt phẳng (phần không bị gạch kể cả bờ) trong hình 4.6.

**4.48.** a) Miền nghiệm là phần không bị gạch (không kể biên) trong hình 4.7.


y
x
O
−2
$-\frac{2}{3}$
$x - 2y = 0$
$x + 3y = -2$

*Hình 4.7*

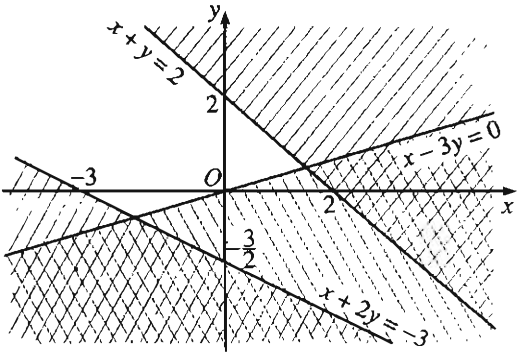


*Hình 4.8*

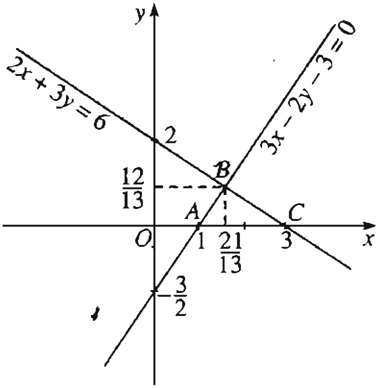
b) Miền nghiệm là phần không bị gạch trong hình 4.8 (không kể tia *At*)

**4.49.** a) Miền nghiệm là phần không bị gạch (không kể biên) trong hình 4.9.

b) Miền nghiệm là miền tam giác *ABC* (không kể hai cạnh *AB*, *BC*) trong hình 4.10.


y
x
O
2
−3
2
$-\frac{3}{2}$
$x + y = 2$
$x - 3y = 0$
$x + 2y = -3$

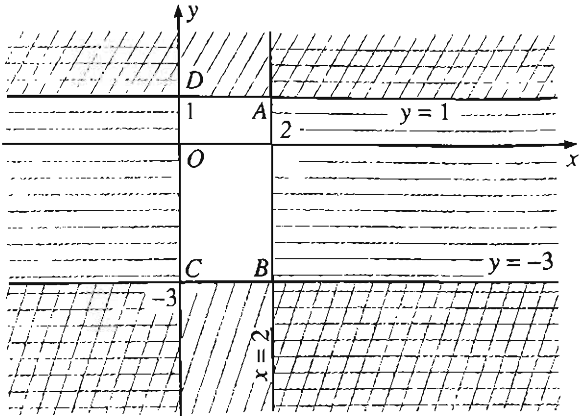
*Hình 4.9*


y
x
O
2
$\frac{12}{13}$
B
A
C
1
$\frac{21}{13}$
3
$-\frac{3}{2}$
$2x + 3y = 6$
$3x - 2y - 3 = 0$

*Hình 4.10*

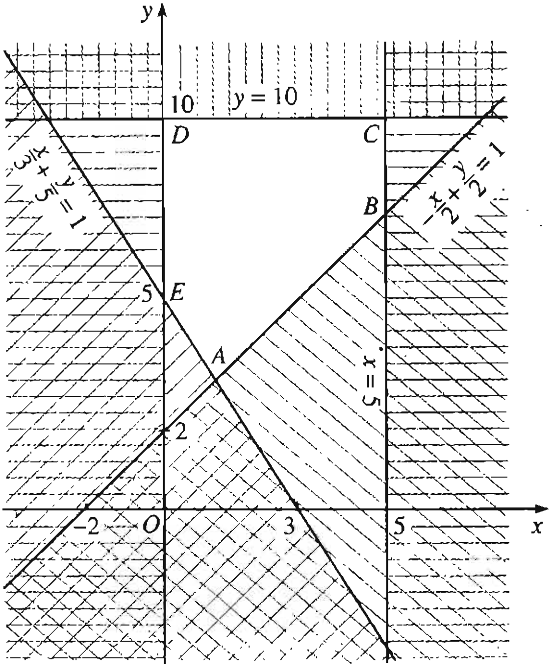
**4.50.** Ta có $\begin{cases} |x-1| < 1 \\ |y+1| \le 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x - 1 < 1 \\ -2 \le y + 1 \le 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 2 \\ -3 \le y \le 1. \end{cases}$

Miền nghiệm là miền hình chữ nhật *DABC* (không kể hai cạnh *AB* và *CD*) ở hình 4.11.


y
D
1
A
2
y = 1
O
x
C
B
y = −3
−3
x = 2

*Hình 4.11*

**4.51.** a) Xem hình 4.12, miền nghiệm là hình ngũ giác *ABCDE*.


y
10
y = 10
D
C
B
$\frac{x}{3}+\frac{y}{5}=1$
$-\frac{x}{2}+\frac{y}{2}=1$
5
E
A
x = 5
2
−2
O
3
5
x

*Hình 4.12*

b) Biểu thức $T = 2x - 2y + 3$ đạt giá trị nhỏ nhất tại một trong các đỉnh của ngũ giác *ABCDE*. Dùng phép thử trực tiếp, ta thấy $T = 2x - 2y + 3$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng $-17$ tại $x = 0$, $y = 10$ (tại điểm *D*).

**4.52.** a) Số giờ làm việc trong mỗi ngày của $M_1$ là $3x + y$.

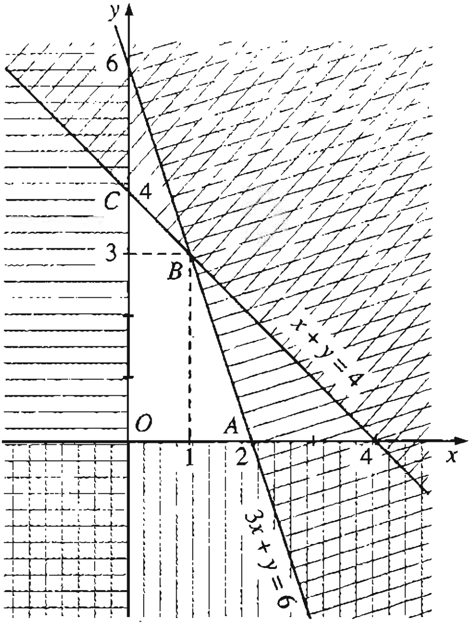
Số giờ làm việc trong mỗi ngày của $M_2$ là $x + y$.

Theo bài ra ta có hệ bất phương trình

$$(\text{I}) \begin{cases} 3x + y \leq 6 \\ x + y \leq 4 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0. \end{cases}$$

Miền nghiệm ($S$) của hệ (I) là miền tứ giác $OABC$ (h.4.13).

b) Số tiền lãi của xí nghiệp mỗi ngày là $T = 2x + 1{,}6y$ (triệu đồng)



*Hình 4.13*

c) $T = 2x + 1{,}6y$ đạt giá trị lớn nhất tại một trong các đỉnh của tứ giác $OABC$. Dùng phép thử trực tiếp, ta thấy $T = 2x + 1{,}6y$ đạt giá trị lớn nhất khi $x = 1$ ; $y = 3$ (điểm $B$).

Vậy để số tiền lãi lớn nhất (6,8 triệu đồng), xí nghiệp cần sản xuất mỗi ngày 1 tấn sản phẩm I và 3 tấn sản phẩm II.

**4.53.** a) Tam thức đã cho có $a = 2 > 0$ và biệt thức $\Delta' = 1 - 10 = -9 < 0$, nên tam thức luôn dương.

b) Tam thức đã cho có $a = -1$ và biệt thức $\Delta = 1 > 0$, và có hai nghiệm $x_1 = 2$, $x_2 = 3$. Suy ra tam thức dương trong khoảng $(2 ; 3)$ và âm trong các khoảng $(-\infty ; 2)$ và $(3 ; +\infty)$.

c) Tam thức đã cho có $a = 2$, biệt thức $\Delta = 0$ nên tam thức dương với mọi $x \neq -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

d) Tam thức đã cho có $a = -4$, biệt thức $\Delta' = 8 > 0$ và có hai nghiệm $x_1 = -\frac{1+\sqrt{2}}{2}$, $x_2 = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$. nên tam thức dương trong khoảng $\left(-\frac{1+\sqrt{2}}{2} ; \frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)$ và âm trong các khoảng $\left(-\infty ; -\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)$ và $\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2} ; +\infty\right)$.

e) Tam thức đã cho có $a = \sqrt{3}$ và biệt thức $\Delta = (\sqrt{3} + 1)^2 - 4\sqrt{3} = (\sqrt{3} - 1)^2 > 0$, tam thức có hai nghiệm $x_1 = -1$, $x_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$. Suy ra tam thức dương trong các khoảng $(-\infty ; -1)$, $\left(\frac{-1}{\sqrt{3}} ; +\infty\right)$ và âm trong khoảng $\left(-1 ; \frac{-1}{\sqrt{3}}\right)$.

*Chú ý* : Nhận xét $a - b + c = 0$ nên tam thức có hai nghiệm

$$x_1 = -1,\ x_2 = -\frac{c}{a} = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Từ đó áp dụng định lí về dấu tam thức.

f) Tam thức có $a = 1$ và $a + b + c = 0$ , nên tam thức có hai nghiệm

$$x_1 = -\sqrt{5},\ x_2 = 1.$$

Suy ra tam thức luôn dương trong các khoảng $(-\infty ; -\sqrt{5})$, $(1 ; +\infty)$ và âm trong khoảng $(-\sqrt{5} ; 1)$.

g) Tam thức đã cho có $a = -0{,}3 < 0$, biệt thức $\Delta = -0{,}8 < 0$, nên tam thức luôn âm với mọi $x$.

h) Tam thức đã cho có $a = 1$,

$$\Delta = (\sqrt{7} - 1)^2 - 4\sqrt{3} = 8 - 2\sqrt{7} - 4\sqrt{3}$$
$$= 2(2 - \sqrt{7}) + 4(1 - \sqrt{3}) < 0.$$

Nên tam thức luôn dương với mọi $x$.

**4.54.** a) Đặt $A(x) = \frac{x - 7}{4x^2 - 19x + 12}$. Tam thức $4x^2 - 19x + 12$ có hai nghiệm $x_1 = \frac{3}{4}$, $x_2 = 4$.

Lập bảng xét dấu $A(x)$ :

| $x$ | $-\infty$ |  | $\frac{3}{4}$ |  | $4$ |  | $7$ |  | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x-7$ |  | $-$ | \| | $-$ | \| | $-$ | $0$ | $+$ |  |
| $4x^2-19x+12$ |  | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | \| | $+$ |  |
| $A(x)$ |  | $-$ | \|\| | $+$ | \|\| | $-$ | $0$ | $+$ |  |

Từ bảng xét dấu ta thu được $A(x) > 0$ trong các khoảng $\left(\frac{3}{4}\,;4\right)$ và $(7\,;+\infty)$

và $A(x) < 0$ trong các khoảng $(-\infty\,;\frac{3}{4})$ và $(4\,;7)$.

b) Đặt $B(x) = \frac{11x+3}{-x^2+5x-7}$. Tam thức $-x^2+5x-7$ có $a = -1 < 0$ và biệt thức $\Delta = -3 < 0$ nên tam thức luôn luôn âm với mọi $x$. Suy ra $B(x) > 0$ $\Leftrightarrow 11x+3 < 0 \Leftrightarrow x < -\frac{3}{11}$ và

$$B(x) < 0 \Leftrightarrow 11x+3 > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{3}{11}$$

c) Đặt $C(x) = \frac{3x-2}{x^3-3x^2+2} = \frac{3x-2}{(x-1)(x^2-2x-2)}$.

Lập bảng xét dấu (HS tự lập), ta thu được :

$C(x) > 0$ trong các khoảng $(-\infty\,;1-\sqrt{3})$, $(\frac{2}{3}\,;1)$ và $(1+\sqrt{3}\,;+\infty)$.

$C(x) < 0$ trong các khoảng $\left(1-\sqrt{3}\,;\frac{2}{3}\right)$ và $(1\,;1+\sqrt{3})$.

d) Đặt $D(x) = \frac{x^2+4x-12}{\sqrt{6}x^2+3x+\sqrt{2}}$.

Ta thấy tam thức $\sqrt{6}x^2+3x+\sqrt{2} > 0$ với mọi $x$, nên dấu của $D(x)$ cùng dấu với dấu của tam thức $x^2+4x-12$. Suy ra $D(x) > 0$ trong các khoảng $(-\infty\,;-6)$ và $(2\,;+\infty)$, $D(x) < 0$ trong khoảng $(-6\,;2)$.

e) Đặt $E(x) = \dfrac{x^2 - 3x - 2}{-x^2 + x - 1}$ Ta thấy $-x^2 + x - 1 < 0$ với mọi $x$, nên $E(x)$ trái dấu với dấu tam thức $x^2 - 3x - 2$.

Suy ra : $E(x) > 0$ trong khoảng $\left(\dfrac{3 - \sqrt{17}}{2} ; \dfrac{3 + \sqrt{17}}{2}\right)$.

$E(x) < 0$ trong các khoảng $\left(-\infty ; \dfrac{3 - \sqrt{17}}{2}\right)$ và $\left(\dfrac{3 + \sqrt{17}}{2} ; +\infty\right)$.

f) Đặt $F(x) = \dfrac{x^3 - 5x + 4}{x^4 - 4x^3 + 8x - 5} = \dfrac{(x - 1)(x^2 + x - 4)}{(x - 1)^2(x^2 - 2x - 5)}$.

Lập bảng xét dấu (HS tự lập) ta thu được :

$F(x) > 0$ trong các khoảng

$$\left(\frac{-1-\sqrt{17}}{2} ; 1 - \sqrt{6}\right), \left(1 ; \frac{-1+\sqrt{17}}{2}\right) \text{ và } (1 + \sqrt{6} ; +\infty).$$

$F(x) < 0$ trong các khoảng

$$\left(-\infty ; \frac{-1-\sqrt{17}}{2}\right), (1 - \sqrt{6} ; 1), \left(\frac{-1+\sqrt{17}}{2} ; 1 + \sqrt{6}\right).$$

**4.55.** a) Ta có biệt thức $\Delta = (m + 1)^2 - 4\left(m - \dfrac{1}{3}\right) = m^2 - 2m + \dfrac{7}{3}$.

Xét tam thức $f(m) = m^2 - 2m + \dfrac{7}{3}$, có $a = 1$ và biệt thức $\Delta' = -\dfrac{4}{3} < 0$ nên $f(m) > 0$ với mọi $m$. Vậy phương trình luôn có nghiệm.

*Chú ý :* Ta có thể xét $\Delta = (m + 1)^2 - 4\left(m - \dfrac{1}{3}\right) = (m - 1)^2 + \dfrac{4}{3} \geq \dfrac{4}{3}$.

b) Ta có $\Delta' = (m - 1)^2 - (m - 3) = \left(m - \dfrac{3}{2}\right)^2 + \dfrac{7}{4} \geq \dfrac{7}{4} > 0$, nên phương trình luôn luôn có nghiệm.

*Chú ý :* Ta có thể sử dụng định lí về dấu tam thức bậc hai để làm bài tập này, học sinh tự làm.

c) Ta có $\Delta = (m + 2)^2 - 4\left(\dfrac{3}{4}m + \dfrac{1}{2}\right) = \left(m + \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{7}{4} \geq \dfrac{7}{4} > 0$, nên phương trình luôn có nghiệm.

d) *) Nếu $m = 1$ phương trình có nghiệm $x = -1$.

*) Nếu $m \neq 1$ ta có

$$\Delta = (3m-2)^2 - 4(m-1)(3-2m)$$

$$= 17m^2 - 32m + 16 = m^2 + 16(m-1)^2 > 0,$$

nên phương trình luôn có nghiệm.

Tóm lại với mọi giá trị của $m$ thì phương trình luôn có nghiệm.

**4.56.** a) Ta có $\Delta' = 4m^2 - 2(2m^2+1) = -2 < 0$, nên phương trình vô nghiệm với mọi giá trị của $m$.

b) Ta có $\Delta = (m+1)^2 - 2(m^2+m+1) = -m^2 - 1 < 0$, nên phương trình vô nghiệm với mọi giá trị của $m$.

c) Ta có $\Delta' = (m-3)^2 - (2m^2 - 7m + 10) = -m^2 + m - 1$.

Xét tam thức $f(m) = -m^2 + m - 1$, có $a = -1$ và $\Delta = -3$ nên $f(m) < 0$ với mọi $m$.

Suy ra phương trình luôn vô nghiệm.

d) Ta có $\Delta = (\sqrt{3}m - 1)^2 - 4(m^2 - \sqrt{3}m + 2) = -m^2 + 2\sqrt{3}m - 7$ $= -(m-\sqrt{3})^2 - 4 < 0$ nên phương trình vô nghiệm với mọi giá trị của $m$.

**4.57.** a) Ta có $\Delta' = 4 - (m-5) = 9 - m$ và tam thức có $a = 1 > 0$. Tam thức luôn dương khi và chỉ khi $\Delta' = 9 - m < 0 \Leftrightarrow m > 9$.

b) Tam thức đã cho có biệt thức

$$\Delta = (m+2)^2 - 4(8m+1) = m^2 - 28m = m(m-28) \text{ và } a = 1.$$

Tam thức luôn dương khi và chỉ khi $\Delta = m(m-28) < 0 \Leftrightarrow 0 < m < 28$.

c) Ta có $\Delta' = 4 - (m-2)^2 = -m^2 + 4m$ và hệ số $a = 1$. Tam thức luôn dương khi và chỉ khi $\Delta = -m^2 + 4m < 0 \Leftrightarrow m > 4$ hoặc $m < 0$.

d) *) Nếu $3m + 1 = 0$ thì $m = -\frac{1}{3}$. Khi đó biểu thức luôn dương với mọi $x$.

*) Nếu $m \neq -\frac{1}{3}$ thì tam thức đã cho có biệt thức

$$\Delta = (3m+1)^2 - 4(m+4)(3m+1) = (3m+1)(-m-15)$$

$$= -3m^2 - 46m - 15 = -(3m^2 + 46m + 15).$$

Tam thức luôn dương khi và chỉ khi

$$\begin{cases} a = 3m + 1 > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \dfrac{-1}{3} \\ (3m + 1)(m + 15) > 0 \end{cases} \qquad (*)$$

$$\Leftrightarrow m > -\frac{1}{3} \text{ hoặc } m < -15.$$

Kết hợp với (*) suy ra $m > -\frac{1}{3}$. Tóm lại với $m \geq -\frac{1}{3}$ thì biểu thức luôn dương với mọi $x$.

**4.58.** a) *) Khi $m = 4$ dễ thấy biểu thức không luôn luôn âm với mọi $x$.

*) Khi $m \neq 4$, để tam thức luôn âm với mọi $x$, điều kiện cần và đủ là :

$$\begin{cases} m - 4 < 0 \\ \Delta = (m + 1)^2 - 4(m - 4)(2m - 1) < 0. \end{cases} \qquad (*)$$

Ta có $\Delta = -7m^2 + 38m - 15$, $\Delta < 0$ khi và chỉ khi $m < \frac{3}{7}$ hoặc $m > 5$. Kết hợp với (*), suy ra $m < \frac{3}{7}$.

b) *) Khi $m = -2$, biểu thức đã cho trở thành $5x - 4$. Biểu thức này không thể luôn luôn âm với mọi $x$. Vậy $m = -2$ không thoả mãn.

*) Khi $m \neq -2$ thì tam thức luôn âm khi và chỉ khi

$$\begin{cases} m + 2 < 0 \\ \Delta = 25 + 16(m + 2) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < -\frac{57}{16}.$$

c) Biểu thức luôn âm khi và chỉ khi $m < -\frac{36}{5}$.

d) Biểu thức luôn âm khi và chỉ khi $-\frac{5}{3} < m < -1$.

**4.59.** a) Xét tam thức $f(x) = 2x^2 - 7x - 15$ có $a = 2 > 0$ và $\Delta = 49 + 120 = 169 = 13^2$, nên tam thức có hai nghiệm $x_1 = -\frac{3}{2}$, $x_2 = 5$. Do đó bất đẳng thức có tập nghiệm là : $(-\infty ; \frac{-3}{2}] \cup [5 ; +\infty)$

b) Nghiệm bất phương trình là $-\frac{7}{3} < x < \frac{15}{4}$.

c) Tập nghiệm bất phương trình là $(-\infty; 1] \cup [4; +\infty)$.

d) Bất phương trình được biến đổi thành $(2x + 3)^2 \geq 0$ nên tập nghiệm là tập số thực $\mathbb{R}$.

e) Nghiệm bất phương trình là $3 < x < 6$.

**4.60.** a) Bất phương trình đã cho tương đương với bất phương trình :

$$\frac{2x-5}{x^2-6x-7} - \frac{1}{x-3} < 0 \Leftrightarrow \frac{(2x-5)(x-3) - (x^2-6x-7)}{(x-3)(x+1)(x-7)} < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 - 5x + 22}{(x-3)(x+1)(x-7)} < 0 \qquad (*)$$

Tam thức $x^2 - 5x + 22$ có $a = 1 > 0$, $\Delta = -63 < 0$, nên $x^2 - 5x + 22 > 0$ với mọi $x$. Suy ra (*) tương đương với $(x - 3)(x + 1)(x - 7) < 0$.

Lập bảng xét dấu :

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $3$ | | $7$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x - 3$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $x + 1$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | | $+$ | |
| $x - 7$ | | $-$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $(x-3)(x+1)(x-7)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

Từ bảng xét dấu suy ra tập nghiệm của bất phương trình đã cho là :

$$T = (-\infty; -1) \cup (3; 7).$$

b) Bất phương trình được biến đổi tương đương thành :

$$\frac{11x^2 + 5x + 6}{x(x^2 + 5x + 6)} \leq 0.$$

Suy ra tập nghiệm là : $S = (-\infty; -3) \cup (-2; 0)$.

c) Bất phương trình được biến đổi tương đương với :

$$\frac{(x+1)(2-x)}{(x+1)(x^2 - x + 1)} \geq 0.$$

Suy ra tập nghiệm là : $S = (-\infty; -1) \cup (-1; 2]$.

d) Bất phương trình được biến đổi tương đương với :

$$\frac{x^2+x-1}{(x-1)(x+1)x} \leq 0.$$

Suy ra tập nghiệm là : $S = \left(-\infty ; \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\right] \cup (-1 ; 0) \cup \left[\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} ; 1\right)$.

**4.61.** Bất phương trình được biến đổi thành $\dfrac{2x+9}{(x-2)(x+2)} < 0$, với $x \neq 0$.

Suy ra tập nghiệm của bất phương trình đã cho là

$$S = \left(-\infty ; -\frac{9}{2}\right) \cup (-2 ; 0) \cup (0 ; 2).$$

Do đó, giá trị nguyên không âm của $x$ thoả mãn bất phương trình là $x = 1$.

**4.62.** a) Nhận xét $x = -1$ và $x = 2$ là nghiệm của phương trình $x^2 - x - 2 = 0$.

Nếu $x \neq -1$ và $x \neq 2$ thì bất phương trình tương đương với hệ

$$\begin{cases} x - 1 \geq 0 \\ x^2 - x - 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x < -1 \text{ hoặc } x > 2. \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S = [2 ; +\infty) \cup \{-1\}$.

b) $T = [-2 ; 3]$.

**4.63.** a) Phương trình $x^2 - 2x - 3 = 0$ có hai nghiệm $x_1 = -1$ ; $x_2 = 3$. Suy ra bất phương trình

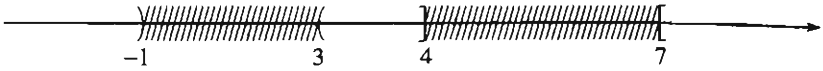
$x^2 - 2x - 3 > 0$ có nghiệm là : $S_1 = (-\infty ; -1) \cup (3 ; +\infty)$.

Phương trình $x^2 - 11x + 28 = 0$ có hai nghiệm $x_1 = 4$ ; $x_2 = 7$. Suy ra bất phương trình $x^2 - 11x + 28 \geq 0$ có nghiệm là : $S_2 = (-\infty ; 4] \cup [7 ; +\infty)$.

Nghiệm của hệ bất phương trình là giao của hai tập nghiệm $S_1$ và $S_2$, tức là

$$S = S_1 \cap S_2 = (-\infty, -1) \cup (3 ; 4] \cup [7 ; +\infty).$$

Biểu diễn trên trục số :



b) $1 < x < \frac{3}{2}$.

c) Bất phương trình vô nghiệm ;

d) $1 < x < 7$.

**4.64.** a) Phương trình $x^2 - 4x - 5 = 0$ có hai nghiệm $x_1 = -1$ ; $x_2 = 5$, nên bất phương trình $x^2 - 4x - 5 < 0$ có tập nghiệm là $S_1 = (-1 ; 5)$

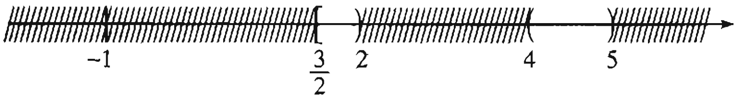
Phương trình $x^2 - 6x + 8 = 0$ có hai nghiệm $x_1 = 2$ ; $x_2 = 4$, nên bất phương trình $x^2 - 6x + 8 > 0$ có tập nghiệm là $S_2 = (-\infty ; 2) \cup (4 ; +\infty)$.

Nghiệm của bất phương trình $2x - 3 \geq 0$ là $S_3 = \left[\frac{3}{2} ; +\infty\right)$.

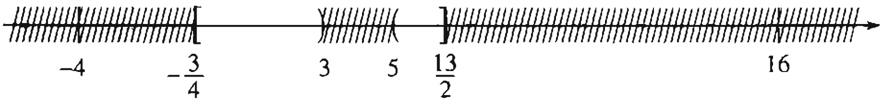
Suy ra nghiệm của hệ là giao của ba tập $S_1$, $S_2$, $S_3$, tức là

$$S = S_1 \cap S_2 \cap S_3 = \left[\frac{3}{2} ; 2\right) \cup (4 ; 5).$$

Biểu diễn trên trục số :



b) $S = \left[-\frac{3}{4} ; 3\right) \cup \left(5 ; \frac{13}{2}\right]$. Biểu diễn trên trục số :



**4.65.** Tập xác định của hàm số $y = f(x)$ gồm các giá trị $x$ thoả mãn

$$\begin{cases} \dfrac{3 - 3x}{-x^2 - 2x + 15} - 1 \geq 0 \\ -x^2 - 2x + 15 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{3 - 3x - 15 + 2x + x^2}{-(x^2 + 2x - 15)} \geq 0 \\ -x^2 - 2x + 15 \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2 - x - 12}{x^2 + 2x - 15} \leq 0 \\ x^2 + 2x - 15 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(x + 3)(x - 4)}{(x - 3)(x + 5)} \leq 0 \\ x^2 + 2x - 15 \neq 0. \end{cases}$$

Đặt $P(x) = \dfrac{(x+3)(x-4)}{(x-3)(x+5)}$

Lập bảng xét dấu $P(x)$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $-5$ | | $-3$ | | $3$ | | $4$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x-4$ | | $-$ | | $-$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $x-3$ | | $-$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $x+3$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | | $+$ | |
| $x+5$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | | $+$ | | $+$ | |
| $P(x)$ | | $+$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |

Từ bảng xét dấu suy ra tập xác định của hàm số $f(x)$ là :

$$(-5\,;\,-3] \cup (3\,;\,4].$$

**4.66.** a) Phương trình $x^2 - 3x - 4 = 0$ có hai nghiệm $x_1 = -1$, $x_2 = 4$, nên bất phương trình $x^2 - 3x - 4 \le 0$ có tập nghiệm là $S_1 = [\,-1\,;\,4]$

Xét bất phương trình $(m-1)x - 2 \ge 0 \Leftrightarrow (m-1)x \ge 2.$ (1)

*) Nếu $m - 1 = 0$ thì bất phương trình trên vô nghiệm.

*) Nếu $m - 1 > 0 \Leftrightarrow m > 1$ thì bất phương trình (1) có tập nghiệm là

$$S_2 = [\frac{2}{m-1}\,;\,+\infty).$$

Để hệ có nghiệm, điều kiện cần và đủ là $S_1 \cap S_2 \ne \varnothing$ tức là

$\dfrac{2}{m-1} \le 4 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2} \le m - 1 \Leftrightarrow m \ge \dfrac{3}{2}$, thoả mãn điều kiện $m > 1$

Vậy $m \ge \dfrac{3}{2}$

*) Nếu $m - 1 < 0 \Leftrightarrow m < 1$ thì bất phương trình (1) có tập nghiệm là

$$S_3 = \left(-\infty\,;\,\frac{2}{m-1}\right].$$

Để hệ có nghiệm, điều kiện cần và đủ là

$$S_1 \cap S_3 \neq \varnothing \Leftrightarrow \frac{2}{m-1} \geq -1 \Leftrightarrow -(m-1) \geq 2 \Leftrightarrow m \leq -1,$$

thoả mãn điều kiện $m < 1$. Vậy $m \leq -1$.

Tóm lại các giá trị của $m$ để hệ có nghiệm là $m \in (-\infty\ ;\ -1] \cup \left[\frac{3}{2}\ +\infty\right)$.

b) Tập hợp các giá trị $m$ thoả mãn bài toán là :

$$\left(-\frac{1}{11}\ ;+\infty\right)$$

**4.67.** a) $-2-\sqrt{2} \leq m \leq -2+\sqrt{2}$.

b) Nếu $m = 1$, phương trình có nghiệm $x = \frac{1}{8}$

Nếu $m \neq 1$, để phương trình có nghiệm điều kiện cần và đủ là :

$$\Delta' = (m+3)^2 - (m-1)(2-m) \geq 0 \Leftrightarrow 2m^2 + 3m + 11 \geq 0.$$

Ta thấy tam thức $f(m) = 2m^2 + 3m + 11$ có $a = 2 > 0$ và $\Delta = -79 < 0$ nên $f(m) > 0$ với mọi $m$.

Vậy phương trình luôn luôn có nghiệm với mọi giá trị của $m$.

**4.68.** a) $m \geq 1$.

b) Không tồn tại $m$ để bất phương trình nghiệm đúng với mọi $x$.

c) Ta thấy tam thức $x^2 - 8x + 20$ có $a = 1 > 0$, $\Delta' = 16 - 20 = -4 < 0$.

Suy ra $x^2 - 8x + 20 > 0$ với mọi $x$. Do đó bài toán trở thành tìm các giá trị $m$ để bất phương trình $mx^2 + 2(m+1)x + 9m + 4 < 0$ (*) đúng với mọi $x$.

Nếu $m = 0$ bất phương trình (*) trở thành $2x + 4 < 0$, bất phương trình chỉ nghiệm đúng với $x < -2$, nên $m = 0$ không thoả mãn.

Nếu $m \neq 0$. Để bất phương trình (*) đúng với mọi $x$ thì điều kiện cần và đủ là :

$$\begin{cases} m < 0 \\ \Delta' = (m+1)^2 - m(9m+4) < 0. \end{cases}$$

Ta thấy tam thức $\Delta' = -8m^2 - 2m + 1$ có hai nghiệm là $m_1 = -\frac{1}{2}$, $m_2 = \frac{1}{4}$ nên $\Delta' < 0 \Leftrightarrow m < -\frac{1}{2}$ hoặc $m > \frac{1}{4}$ Kết hợp với điều kiện $m < 0$, suy ra các giá trị cần tìm của $m$ là $m < -\frac{1}{2}$

d) $m > 5$.

**4.69.** a) Phương trình có hai nghiệm âm phân biệt khi và chỉ khi :

$$\begin{cases} \Delta' = (m+1)^2 - (9m-5) > 0 \\ \frac{S}{2} = -(m+1) < 0 \\ ac = 9m - 5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 7m + 6 > 0 \\ m > -1 \\ m > \frac{5}{9} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > -1 \\ m > \frac{5}{9} \\ m > 6 \text{ hoặc } m < 1 \end{cases} \Leftrightarrow m > 6 \text{ hoặc } \frac{5}{9} < m < 1.$$

Vậy các giá trị cần tìm của $m$ là $m \in \left(\frac{5}{9}; 1\right) \cup (6; +\infty)$.

b) $m \in (-\infty; -3) \cup (2; 6)$.

**4.70.** a) + Với $m = 2$, phương trình đã cho trở thành :

$$-6x^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Phương trình có hai nghiệm, nên không thoả mãn yêu cầu của đầu bài.

+ Với $m \neq 2$, đặt $t = x^2 \geq 0$, ta được phương trình

$$f(t) = (m-2)t^2 - 2(m+1)t + 2m - 1 = 0. \qquad (*)$$

Để phương trình đã cho có đúng một nghiệm thì phương trình (*) hoặc có nghiệm kép $t = 0$ hoặc có một nghiệm âm, còn nghiệm thứ hai bằng 0.

Bây giờ xét $t = 0$. Khi đó $f(0) = 2m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$. Thay $m = \frac{1}{2}$ vào (*) ta được :

$$f(t) = t\left(-\frac{3}{2}t - 3\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = -2. \end{array}\right.$$

Vậy $m = \frac{1}{2}$ là giá trị cần tìm (để phương trình đã cho có một nghiệm).

b) $m = \dfrac{7+3\sqrt{5}}{2}$. $m \in \left(\dfrac{1}{2}; 2\right]$. *Hướng dẫn*. Rõ ràng với $m = 2$ phương trình có hai nghiệm $x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Với $m \neq 2$.

Để phương trình đã cho có đúng hai nghiệm thì phương trình (*) hoặc có nghiệm kép dương hoặc có một nghiệm âm và một nghiệm dương.

– Phương trình (*) có hai nghiệm trái dấu khi và chỉ khi $ac < 0$ tức là $(m-2)(2m-1) < 0$ hay $\dfrac{1}{2} < m < 2$

– Phương trình (*) có nghiệm kép dương khi và chỉ khi $\Delta' = 0$ và $-\dfrac{b}{2a} > 0$.

$$\Delta' = -m^2 + 7m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{7 \pm 3\sqrt{5}}{2};$$

$$-\frac{b}{2a} = \frac{m+1}{m-2} > 0 \Leftrightarrow m < -1 \text{ hoặc } m > 2.$$

Chỉ có $m = \dfrac{7+3\sqrt{5}}{2}$ thoả mãn hai điều kiện trên.

c) $2 < m < \dfrac{7+3\sqrt{5}}{2}$ *Hướng dẫn*. Tìm $m$ để phương trình $f(t) = 0$ có hai nghiệm dương phân biệt. Điều kiện cần và đủ là $\Delta' > 0$, $S > 0$ và $P > 0$.

**4.71.** a) Phương trình được biến đổi thành $3(3x-2) + \sqrt{3x-2} - 4 = 0$. (*)

Đặt $t = \sqrt{3x-2} \geq 0$, khi đó (*) trở thành $3t^2 + t - 4 = 0$ giải ra có hai nghiệm $t_1 = 1$, $t_2 = -\dfrac{4}{3}$

Do $t \geq 0$, nên chỉ lấy $t = 1$. Vậy (*) $\Leftrightarrow \sqrt{3x-2} = 1 \Leftrightarrow x = 1$. Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 1$.

b) $x = 3$. *Hướng dẫn*. Phương trình tương đương với hệ :

$$\begin{cases} -x^2 + 2x + 4 = (x-2)^2 \\ x - 2 \geq 0 \end{cases}$$

c) $x = \dfrac{-7 + \sqrt{13}}{3}$. *Hướng dẫn*. Phương trình đã cho tương đương với hệ

$$\begin{cases} x^2 - 2x - 3 = (2x + 3)^2 \\ 2x + 3 \geq 0 \end{cases}$$

d) $x = -3$. *Hướng dẫn*. Phương trình tương đương với

$$\begin{cases} \sqrt{(9 - 5x)(3 - x)} = 9 - x \\ x \leq \dfrac{9}{5}. \end{cases}$$

**4.72.** a) $x = -1$, $x = 4$.

b) $x \in \{1 ; 3\}$. *Hướng dẫn*. Đặt $x^2 - 4x + 10 = t$, $t \neq 0$.

c) $x \in \left\{\dfrac{3}{4} ; 2\right\}$. *Hướng dẫn*. Nhận xét $x = 0$ không là nghiệm của phương trình, nên ta chia cả tử và mẫu của vế trái của phương trình cho $x$ ta được phương trình tương đương :

$$\frac{2}{2x + \frac{3}{x} - 5} + \frac{13}{2x + \frac{3}{x} + 1} = 6.$$

Phương trình này có dạng $\dfrac{2}{y - 5} + \dfrac{13}{y + 1} = 6$,

trong đó $2x + \dfrac{3}{x} = y$ Từ đó giải được $y = 1$ và $y = 5{,}5$

d) $x = \dfrac{1}{2}(1 - \sqrt{2} \pm \sqrt{2\sqrt{2} - 1})$. *Hướng dẫn*. Cộng vào hai vế của phương trình biểu thức $2x.\dfrac{x}{x - 1}$.

Từ đó đi đến : $\left(\dfrac{x^2}{x - 1}\right)^2 - 2\dfrac{x^2}{x - 1} = 1$.

Đặt $t = \dfrac{x^2}{x - 1}$ được phương trình $t^2 - 2t - 1 = 0$.

**4.73.** a) $x_1 = \sqrt{\dfrac{33}{2}}$. $x_2 = -\sqrt{\dfrac{33}{2}}$. *Hướng dẫn*. Phương trình được biến đổi thành

$$2x^2 + 3 - 5\sqrt{2x^2 + 3} - 6 = 0. \qquad (*)$$

Đặt $t = \sqrt{2x^2 + 3} \geq 0$. Khi đó (*) trở thành $t^2 - 5t - 6 = 0$ và có hai nghiệm $t_1 = -1$, $t_2 = 6$. Do $t \geq 0$, nên chỉ lấy $t = 6$.

b) $x = 3$ ; $x = -\frac{9}{2}$. *Hướng dẫn.* Đặt $t = \sqrt{2x^2 + 3x + 9}$.

c) $x = 0$ ; $x = 2$. *Hướng dẫn.* Đặt $t = \sqrt{81 - 7x^3}$

d) $x = 1$ ; $x = \frac{1}{2}$. *Hướng dẫn.* Đặt $t = \sqrt{2x^2 - 3x + 2}$.

**4.74.** a) $x = \frac{\sqrt{17} - 3}{2}$ ;

b) $x = -2 - \sqrt{2}$ ;

c) $x \in \{-1, -3\}$ ;

d) $x = \frac{-15 \pm \sqrt{165}}{2}$

**4.75.** a) Phương trình tương đương với :

$$\text{(I)} \begin{cases} x^2 - (2x - 1) = 0 \\ 2x - 1 \geq 0 \end{cases} \text{ hoặc (II) } \begin{cases} x^2 + (2x - 1) = 0 \\ 2x - 1 < 0. \end{cases}$$

Giải hệ (I) : $\begin{cases} x = 1 \\ x \geq \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$

Giải hệ (II) : $\begin{cases} x_1 = -1 - \sqrt{2}; \ x_2 = -1 + \sqrt{2} \\ x < \frac{1}{2} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow x = -1 - \sqrt{2} \text{ hoặc } x = -1 + \sqrt{2}.$$

Vậy phương trình có các nghiệm : $x = 1$ ; $x = -1 \pm \sqrt{2}$.

b) $x = 1$. *Hướng dẫn.* Phương trình tương đương với :

$$\begin{cases} x^2 - 2x - 3 = x^2 - 2x + 5 \\ x^2 - 2x - 3 \geq 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} -(x^2 - 2x - 3) = x^2 - 2x + 5 \\ x^2 - 2x - 3 < 0. \end{cases}$$

c) $x = \frac{4}{3}$ ; $x = 2$. *Hướng dẫn*. Phương trình tương đương với :

$$(2x-3)^2 = (x-1)^2$$

d) $x = 1 \pm \sqrt{6}$, $x = 1 \pm \sqrt{2}$. *Hướng dẫn*. Phương trình tương đương với :

$$x^2 - 2x - 3 = 2 \text{ hoặc } x^2 - 2x - 3 = -2.$$

**4.76.** a) $5 \le x \le 10$. *Hướng dẫn*. Đưa phương trình về dạng :

$$\left|\sqrt{x-1} - 2\right| + \left|\sqrt{x-1} - 3\right| = 1.$$

b) $\frac{7}{2} \le x \le 7$. *Hướng dẫn*. Phương trình được đưa về dạng

$$\left|\sqrt{14x-49} + 7\right| + \left|\sqrt{14x-49} - 7\right| = 14.$$

c) $|x| = \frac{5}{2}$.

d) $x \in \left\{-\frac{\sqrt{2}}{2} ; \frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2})\right\}$ *Hướng dẫn*. Nếu $x$ nghiệm đúng phương trình thì $-\frac{1}{\sqrt{2}} \le x \le \frac{1}{\sqrt{2}}$ nên $\sqrt{1-x^2} \ge |x|$, nghĩa là $x + \sqrt{1-x^2} \ge 0$.

Vậy ta có thể giả thiết $x \le \frac{1}{\sqrt{2}}$ và phương trình trở thành :

$$x + \sqrt{1-x^2} = \sqrt{2}(1-2x^2).$$

Mặt khác $1 - 2x^2 = (\sqrt{1-x^2} + x)(\sqrt{1-x^2} - x)$, nên ta có thể đưa phương trình đã cho về :

$$(x + \sqrt{1-x^2})\left(\sqrt{1-x^2} - x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0.$$

**4.77.** a) $-6 \le x < -4 + \sqrt{2}$. *Hướng dẫn*. Bất phương trình tương đương với hệ :

$$\begin{cases} -x^2 - 8x - 12 \ge 0 \\ x + 4 < 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} -x^2 - 8x - 12 > (x+4)^2 \\ x + 4 \ge 0. \end{cases}$$

b) $x \in \left[0 ; \frac{1}{11}\right) \cup (4 ; +\infty)$. *Hướng dẫn*. Bất phương trình tương đương với :

$$\begin{cases} 4x + 2 > 0 \\ 5x^2 + 61x \ge 0 \\ 5x^2 + 61x < (4x+2)^2. \end{cases}$$

c) $x \in (-\infty ; 0) \cup [1 ; 2]$. *Hướng dẫn.* Bất phương trình tương đương với :

$$\begin{cases} x \neq 0 \\ x(\sqrt{2-x} + 2x - 3) \geq 0. \end{cases}$$

d) $x \in \left[-\dfrac{3}{2} ; -1\right) \cup \left(1 ; \dfrac{3}{2}\right]$. *Hướng dẫn.* Bất phương trình tương đương với :

$$\begin{cases} 3x^2 - 3 > 0 \\ (2x+3)[3(2x-3) - \sqrt{3x^2 - 3}] \leq 0. \end{cases}$$

**4.78.** a) Bất phương trình tương đương với hệ :

$$\begin{cases} x + 3 \geq 0 \\ 1 - x > 0 \\ x + 3 < (1-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3 \geq 0 \\ x < 1 \\ x^2 - 3x - 2 > 0. \end{cases}$$

Từ đó suy ra tập nghiệm bất phương trình là $S = \left[-3 ; \dfrac{3-\sqrt{17}}{2}\right)$.

b) $3 < x < 5$. *Hướng dẫn.* Bất phương trình đã cho tương đương với hệ :

$$\begin{cases} -x^2 + 6x - 5 > (8 - 2x)^2 \\ 8 - 2x \geq 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} -x^2 + 6x - 5 \geq 0 \\ 8 - 2x < 0. \end{cases}$$

c) $S = \left[0 ; \dfrac{1}{11}\right) \cup (4 ; +\infty)$. *Hướng dẫn.* Bất phương trình tương đương với hệ :

$$\begin{cases} (4x+2)^2 > 5x^2 + 61x \\ 5x^2 + 61x \geq 0 \\ 4x + 2 > 0. \end{cases}$$

d) $S = \mathbb{R}$. *Hướng dẫn.* Bất phương trình đã cho tương đương với :

$$\left|x^2 - x\right| > x - 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x > x - 2 \\ x^2 - x \geq 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x - x^2 > x - 2 \\ x^2 - x < 0. \end{cases}$$

**4.79.** a) * Nếu $-5 \le x < 0$ bất phương trình luôn luôn đúng.

* Xét $x \ge 0$.

Nếu $3 < \sqrt{x+5}$ tức là $x > 4$, bất phương trình đã cho tương đương với $\sqrt{x+5} > x + 3$. Không có $x$ thoả mãn bất phương trình này.

Nếu $3 \ge \sqrt{x+5}$ tức là $x \le 4$, bất phương trình đã cho tương đương với $3 - x > \sqrt{x+5}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < 3 \\ 9 - 6x + x^2 > x + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 3 \\ x^2 - 7x + 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x < \frac{7-\sqrt{33}}{2}.$$

Kết hợp ta có : $-5 \le x < \frac{7-\sqrt{33}}{2}$.

b) $x \in [-9 ; 16)$.

c) Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\left|24 - 6\sqrt{6-x}\right| > -x - 13. \tag{1}$$

Điều kiện của bất phương trình là $x \le 6$.

* Nếu $-x - 13 < 0$ tức là $x > -13$, bất phương trình luôn luôn nghiệm đúng.

Vậy mọi $x \in (-13 ; 6]$ là nghiệm của bất phương trình.

* Với $x \le -13$, ta có $\sqrt{6-x} > \sqrt{16} = 4$ nên $24 - 6\sqrt{6-x} < 0$.

Do đó

(1) $\Leftrightarrow 6\sqrt{6-x} - 24 > -x - 13 \Leftrightarrow 6\sqrt{6-x} > -x + 11$

$\Leftrightarrow 36(6-x) > x^2 - 22x + 121 \Leftrightarrow x^2 + 14x - 95 < 0$

$\Leftrightarrow -19 < x < 5$.

Vậy trong trường hợp đang xét, mọi $x \in (-19 ; -13]$ là nghiệm của bất phương trình.

Kết luận : Tập nghiệm là $S = (-13 ; 6] \cup (-19 ; -13] = (-19 ; 6]$.

d) $x > \frac{1}{2}$. *Hướng dẫn*. Bất phương trình được viết thành :

$$|x+3| - |x-3| > 1.$$

**4.80.** a) Đặt $t = x^2 + x + 2$, $t > 0$. Khi đó bất phương trình trở thành :

$$(t-1)(t+1) \geq 15 \Leftrightarrow t^2 \geq 16. \qquad (*)$$

Do $t > 0$ nên nghiệm của bất phương trình (*) là $t \geq 4$. Suy ra

$$x^2 + x + 2 \geq 4 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1 \text{ hoặc } x \leq -2.$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S = (-\infty\,;\,-2\,] \cup [1\,;\,+\infty)$.

b) $S = \left(-7\,;\,-\dfrac{5+\sqrt{17}}{2}\right] \cup \left[\dfrac{\sqrt{17}-5}{2}\,;\,2\right)$ *Hướng dẫn.* Đặt $t = \sqrt{x^2+5x+2} \geq 0$.

c) $S = (-\infty\,;\,-2] \cup [6\,;\,+\infty)$. *Hướng dẫn.* Đặt $t = \sqrt{2x^2 - 8x + 12} \geq 0$.

**4.81.** a) Bất phương trình tương đương với $(x-3)\left[\sqrt{x^2+4} - (x+3)\right] \leq 0$. Từ đó tập nghiệm cần tìm là hợp các tập nghiệm của hai hệ bất phương trình sau :

$$\text{(I)} \begin{cases} x - 3 \geq 0 \\ \sqrt{x^2+4} \leq x + 3 \end{cases}, \qquad \text{(II)} \begin{cases} x - 3 \leq 0 \\ \sqrt{x^2+4} \geq x + 3.\,(*) \end{cases}$$

Giải hệ (I) : (I) $\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x^2 + 4 \leq x^2 + 6x + 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x \geq -\dfrac{5}{6} \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 3.$ (1)

Giải hệ (II) : Ta xét hai trường hợp :

– Trường hợp $x \leq -3$ : Dễ thấy mọi $x \leq -3$ là nghiệm.

– Trường hợp $x > -3$ : Ta có

(*) $\Leftrightarrow x^2 + 4 \geq x^2 + 6x + 9 \Leftrightarrow x \leq -\dfrac{5}{6}$. Vậy trong trường hợp này, hệ (II) có nghiệm là $-3 < x \leq -\dfrac{5}{6}$.

Do đó (II) $\Leftrightarrow x \leq -\dfrac{5}{6}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra tập nghiệm của bất phương trình đã cho là :

$$S = \left(-\infty\,;\,-\frac{5}{6}\right] \cup [3\,;\,+\infty).$$

b) $S = \left[-\frac{2}{3}; -\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{5}}; \frac{5}{2}\right]$. *Hướng dẫn.* Bất phương trình tương đương với hệ

$$\begin{cases} 9x^2 - 4 \le (3x + 2)\sqrt{5x^2 - 1} \\ 5x^2 - 1 > 0. \end{cases}$$

**4.82.** Với $m < 0$ : Phương trình vô nghiệm.

Với $m = 0$ : Phương trình có ba nghiệm $x = 0$ ; $x = \pm 2$.

Với $m > 0$ : Phương trình tương đương với

$$|x^2| - 2|x| + m^2 = 0. \qquad (1)$$

Xét phương trình $y^2 - 2y + m^2 = 0$ (2)

có $\Delta' = 1 - m^2$

– Nếu $m > 1$ thì (2) vô nghiệm nên (1) vô nghiệm.

– Nếu $m = 1$ thì (2) có nghiệm $y = 1$ nên (1) có hai nghiệm $x = \pm 1$.

– Nếu $0 < m < 1$ thì (2) có hai nghiệm dương

$$y_1 = 1 + \sqrt{1 - m^2},\ y_2 = 1 - \sqrt{1 - m^2},$$

suy ra (1) có bốn nghiệm phân biệt $x_{1,2} = \pm(1 + \sqrt{1 - m^2})$

$$x_{3,4} = \pm(1 - \sqrt{1 - m^2}).$$

**4.83.** a) Do $11 < \sqrt{123} < 12$ và $6 < \sqrt{37} < 7$ nên $-12 < -\sqrt{123} < -11$ và $-7 < -\sqrt{37} < -6$. Suy ra $-\frac{9}{4} < \frac{3 - \sqrt{123}}{4} < -2$ và $-\frac{5}{3} < \frac{2 - \sqrt{37}}{3} < -\frac{4}{3}$.

Vì $-2 < -\frac{5}{3}$, do đó $\frac{2 - \sqrt{37}}{3} > \frac{3 - \sqrt{123}}{4}$.

b) Ta có $\frac{3\sqrt{7} + 5\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = \frac{3}{5}\sqrt{35} + \sqrt{10}$ và $\sqrt{35} < 6$, $\sqrt{10} < 3{,}2$.

Suy ra $\frac{3}{5}\sqrt{35} + \sqrt{10} < \frac{3.6}{5} + 3{,}2 = 6{,}8 < 6{,}9$.

**4.84.** Ta có $|ab - c| = |ab - a + a - c| \leq |ab - a| + |a - c|$

$$= |a||b - 1| + |a - c| < 1.10 + 10 = 20.$$

**4.85.** a) Bất đẳng thức cần chứng minh được biến đổi thành :

$$a^6 + b^9 + 64 \geq 12a^2b^3$$

Áp dụng bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân, ta có :

$$a^6 + b^9 + 64 \geq 3\sqrt[3]{a^6b^9.64} = 12a^2b^3$$

Vậy $a^6 + b^9 + 64 \geq 12a^2b^3$ hay $\dfrac{a^6 + b^9}{4} \geq 3a^2b^3 - 16.$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = 2$, $b = \sqrt[3]{4}$

b) Bất đẳng thức cần chứng minh được biến đổi thành :

$$(a - b)^2 + (b - \sqrt{a})^2 + (a - \sqrt{b})^2 \geq 0.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = 0$ hoặc $a = b = 1$

Điều này luôn luôn đúng.

**4.86.** a) Ta có $A = (a - 1)^2 + (b - 1)^2 + ab - a - b + 2004$

$$= (a - 1)^2 + (b - 1)^2 + (a - 1)(b - 1) + 2003$$

$$= \left[(a - 1) + \frac{b - 1}{2}\right]^2 + \frac{3}{4}(b - 1)^2 + 2003 \geq 2003.$$

Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases} a - 1 + \dfrac{b - 1}{2} = 0 \\ b - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1. \end{cases}$

Vậy $A$ nhỏ nhất bằng 2003 khi $a = b = 1$.

b) $B = (a - b + 1)^2 + (b - 1)^2 - 14 \geq -14.$

Vậy $B$ nhỏ nhất bằng $-14$ khi $a = 0$, $b = 1$.

**4.87.** a) Do $a, b, c > 0$ nên $a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc}$ và $a^2 + b^2 + c^2 \geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$

Suy ra $(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2) \geq 9\sqrt[3]{a^3b^3c^3} = 9abc.$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

b) Áp dụng bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân, ta có

$$\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}\geq 2b\,;\ \frac{ac}{b}+\frac{ab}{c}\geq 2a\ ;\ \frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}\geq 2c,\text{ nên}$$

$$\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c}\geq a+b+c\,.$$

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$.

c) $$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b+c}{4}\geq a\ ;\ \frac{b^2}{a+c}+\frac{a+c}{4}\geq b\ ;\ \frac{c^2}{a+b}+\frac{a+b}{4}\geq c\,.$$

Do đó $\dfrac{a^2}{b+c}+\dfrac{b^2}{a+c}+\dfrac{c^2}{a+b}\geq\dfrac{a+b+c}{2}$.

Mặt khác từ bất đẳng thức $(x+y)^2\geq 4xy$ và $x, y>0$ ta suy ra :

$$\frac{2ab}{a+b}\leq\frac{a+b}{2}\,;\frac{2bc}{b+c}\leq\frac{b+c}{2}\ ;\ \frac{2ca}{c+a}\leq\frac{c+a}{2}.$$

Cộng từng vế các bất đẳng thức và chia hai vế cho 2 ta được

$$\frac{ab}{a+b}+\frac{bc}{b+c}+\frac{ca}{c+a}\leq\frac{a+b+c}{2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$.

**4.88.** a) Ta có thể viết

$$P=|x+1|+|2x+5|+|18-3x|\geq|(x+1)+(2x+5)+(18-3x)|=24$$

(Áp dụng bất đẳng thức $|a|+|b|+|c|\geq|a+b+c|$).

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi (I) $\begin{cases}x+1\geq 0\\2x+5\geq 0\\18-3x\geq 0\end{cases}$ hoặc (II) $\begin{cases}x+1\leq 0\\2x+5\leq 0\\18-3x\leq 0.\end{cases}$

Hệ (I) có nghiệm $-1\leq x\leq 6$ ; Hệ (II) vô nghiệm.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $P$ là 24 khi $-1\leq x\leq 6$.

b) Áp dụng bất đẳng thức $|a-b|\geq|a|-|b|$ ta được

$$|x-1|\geq|x|-1,$$

$$|y-2|\geq|y|-2,$$

$$|z-3|\geq|z|-3.$$

Do đó $Q \geq |x| + |y| + |z| - 6 = 2006 - 6 = 2000$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x - 1 \geq 0$ ; $y - 2 \geq 0$ ; $z - 3 \geq 0$ và $x + y + z = 2006$.

Chẳng hạn $x = 2000$ ; $y = z = 3$ thì $|x - 1| = 1999$ ; $|y - 2| = 1$ ; $|z - 3| = 0$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $Q$ là 2000.

**4.89.** a) $S = \left(-\infty\,;\, \dfrac{5\sqrt{3} - 1}{3(\sqrt{3} - 1)}\right)$ ; b) $S = \left(\dfrac{-19}{13}\,;\, +\infty\right)$.

c) Bất phương trình được đưa về dưới dạng

$$(1 + \sqrt{3})x \leq (1 + \sqrt{3})^2 \Leftrightarrow x \leq 1 + \sqrt{3}.$$

Vậy $S = (-\infty\,;\, 1 + \sqrt{3}\,]$

d) Bất phương trình đã cho tương đương với

$$10 \geq (x + \sqrt{5})^2 - (x - \sqrt{5})^2 \Leftrightarrow x \leq \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Vậy $S = \left(-\infty\,;\, \dfrac{\sqrt{5}}{2}\right]$.

**4.90.** a) Với $m = 3$, tập nghiệm của bất phương trình là $\varnothing$

Với $m < 3$, tập nghiệm của bất phương trình là $\left(-\infty\,;\, \dfrac{1 + m^2}{m - 3}\right)$.

Với $m > 3$, tập nghiệm của bất phương trình là $\left(\dfrac{1 + m^2}{m - 3}\,;\, +\infty\right)$.

b) Với $m = 0$ hoặc $m = 2$, tập nghiệm bất phương trình là $\mathbb{R}$.

Với $m < 0$ hoặc $m > 2$, tập nghiệm của bất phương trình là $\left[\dfrac{1}{m}\,;\, +\infty\right)$

Với $0 < m < 2$, tập nghiệm của bất phương trình là $\left(-\infty\,;\, \dfrac{1}{m}\right]$.

c) Nếu $m < 10$ thì tập nghiệm của bất phương trình là $\left(-\infty\,;\, \dfrac{m - 7}{m - 10}\right)$.

Nếu $m > 10$ thì tập nghiệm của bất phương trình là $\left(\dfrac{m - 7}{m - 10}\,;\, +\infty\right)$ ;

Nếu $m = 10$ thì bất phương trình vô nghiệm.

d) Nếu $m \in (-\infty\,;\,-\sqrt{5}\,] \cup [\,\sqrt{5}\,;\,+\infty)$ thì tập nghiệm của bất phương trình là $(-\infty\,;\,-m-\sqrt{m^2-5}\,] \cup [\,-m+\sqrt{m^2-5}\,;\,+\infty)$.

Nếu $m \in (-\sqrt{5}\,;\,\sqrt{5}\,)$ thì tập nghiệm của bất phương trình là $\mathbb{R}$.

e) Nếu $m = 0$ thì tập nghiệm của bất phương trình là $\left(-\infty\,;\,-\dfrac{1}{4}\right]$.

Nếu $m > 4$ thì bất phương trình vô nghiệm.

Nếu $0 < m \le 4$ thì tập nghiệm của bất phương trình là

$$\left[\frac{-2-\sqrt{4-m}}{m};\frac{-2+\sqrt{4-m}}{m}\right].$$

Nếu $m < 0$ thì tập nghiệm của bất phương trình là

$$\left(-\infty\,;\,\frac{-2-\sqrt{4-m}}{m}\right] \cup \left[\frac{-2+\sqrt{4-m}}{m}\,;\,+\infty\right).$$

f) Nếu $m = 3$ thì tập nghiệm của bất phương trình là $\left(-\dfrac{3}{8}\,;\,+\infty\right)$

Nếu $m < 3$ thì tập nghiệm của bất phương trình là

$$\left(-\infty\,;\,\frac{m+1-\sqrt{3m^2-7m+10}}{m-3}\right] \cup \left[\frac{m+1+\sqrt{3m^2-7m+10}}{m-3}\,;\,+\infty\right).$$

Nếu $m > 3$ thì tập nghiệm của bất phương trình là

$$\left[\frac{m+1-\sqrt{3m^2-7m+10}}{m-3}\,;\,\frac{m+1+\sqrt{3m^2-7m+10}}{m-3}\right].$$

**4.91.** a) $\{4\,;\,5\,;\,6\,;\,7\,;\,8\,;\,9\,;\,10\,;\,11\}$.

b) Không có nghiệm nguyên.

**4.92.** a) $m \in \left[\dfrac{64}{33}\,;\,+\infty\right)$.

b) $m \in \mathbb{R}$.

**4.93.** a) Vô nghiệm.

b) $S = [0 ; +\infty)$.

c) $S = (-\infty ; -3) \cup (-1 ; 4) \cup \left(\dfrac{7+\sqrt{57}}{2} ; +\infty\right)$.

**4.94.** a) $x \in (-\infty ; -4] \cup [-2 ; -1] \cup [1 ; +\infty)$. *Hướng dẫn.* Đặt $t = x^2 + 3x - 1$.

b) $x \in (-2 ; -1) \cup (2 ; 3)$. *Hướng dẫn.* Đặt $t = x^2 - x - 4$

c) $x \in (-\infty ; -2) \cup (-1 ; 3) \cup (4 ; +\infty)$.

d) $x \in (-2 ; 1)$.

**4.95.** a) $x \in \left[\dfrac{7-\sqrt{109}}{10} ; \dfrac{7+\sqrt{109}}{10}\right]$; b) $x \in \left[-2 ; \dfrac{1}{3}\right]$;

c) $x \in \left[\dfrac{4}{3} ; \dfrac{5}{2}\right)$; d) $x \in [1 ; 6]$.

**4.96.** a) Do $2x^2 - 2x + 3 > 0$ với mọi $x$ nên bất phương trình tương đương với :

$$x^2 - (2+m)x + 4 > 0.$$

Để bất phương trình nghiệm đúng với mọi $x$, điều kiện cần và đủ là

$$\Delta = (2+m)^2 - 16 < 0 \text{ hay } -6 < m < 2.$$

b) $m \in (-2 ; 4)$.

**4.97.** Đặt $t = x^2$ phương trình trở thành $f(t) = (m+3)t^2 - (2m-1)t - 3 = 0$, $t \geq 0$.

- Nếu $m + 3 = 0$, tức là $m = -3$ thì $f(t) = 7t - 3 = 0$, từ đó $t = \dfrac{3}{7}$. Suy ra phương trình đã cho có hai nghiệm $x = \pm\sqrt{\dfrac{3}{7}}$.

- Nếu $m + 3 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -3$

Khi đó, $\Delta = (2m-1)^2 + 12(m+3) = 4m^2 + 8m + 37 > 0$ với mọi $m$ nên phương trình $f(t) = 0$ luôn có hai nghiệm phân biệt khác 0 (vì $c = -3 \neq 0$).

+) Phương trình $f(t) = 0$ có hai nghiệm dương khi và chỉ khi :

$$\begin{cases} S = \dfrac{2m-1}{m+3} > 0 \\ P = \dfrac{-3}{m+3} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m - 1 < 0 \\ m + 3 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < -3.$$

Khi đó phương trình đã cho có bốn nghiệm phân biệt.

+) Phương trình $f(t) = 0$ có hai nghiệm âm khi và chỉ khi :

$$\begin{cases} S = \dfrac{2m-1}{m+3} < 0 \\ P = \dfrac{-3}{m+3} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m - 1 > 0 \\ m + 3 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \dfrac{1}{2} \\ m < -3 \end{cases} \text{(không tồn tại } m\text{).}$$

+) Phương trình $f(t) = 0$ có một nghiệm âm và một nghiệm dương khi và chỉ khi $ac = (-3)(m+3) < 0 \Leftrightarrow m > -3$.

Khi đó phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt.

Tóm lại : Với $m \geq -3$ phương trình có hai nghiệm phân biệt.

Với $m < -3$ phương trình có bốn nghiệm phân biệt.

**4.98.** a) Nếu đặt $f(x) = \dfrac{7x-4}{8x+5} - 2$ thì

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{14}{9} ; -\frac{5}{8}\right),$$

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty ; -\frac{14}{9}\right) \cup \left(-\frac{5}{8} ; +\infty\right).$$

b) Nếu đặt $g(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 4}{x^2 + 5x + 4}$ thì

$$g(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-4 ; -1) \cup (1 ; 4),$$

$$g(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty ; -4) \cup (-1 ; 1) \cup (4 ; +\infty).$$

c) Nếu đặt $h(x) = \dfrac{15x^2 - 7x - 2}{6x^2 - x + 5}$ thì

$$h(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty ; -\frac{1}{5}\right) \cup \left(\frac{2}{3} ; +\infty\right),$$

$$h(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{1}{5} ; \frac{2}{3}\right).$$

d) Nếu đặt $p(x) = \dfrac{x^4 - 17x^2 + 60}{x(x^2 - 8x + 5)}$ thì $p(x) > 0$ khi và chỉ khi

$$x \in (-\sqrt{12}, -\sqrt{5}) \cup (0 ; 4 - \sqrt{11}) \cup (\sqrt{5} ; \sqrt{12}) \cup (4 + \sqrt{11} ; +\infty).$$

$p(x) < 0$ khi và chỉ khi

$$x \in (-\infty ; -\sqrt{12}) \cup (-\sqrt{5} ; 0) \cup (4 - \sqrt{11} ; \sqrt{5}) \cup (\sqrt{12} ; 4 + \sqrt{11}).$$

**4.99.** a) $x \in (5 ; +\infty)$ ;

b) $x \in (-\infty ; \sqrt[3]{2}) \cup (\sqrt[3]{2} ; +\infty)$.

*Hướng dẫn.* $\sqrt{x^6 - 4x^3 + 4} = |x - \sqrt[3]{2}|\ (x^2 + \sqrt[3]{2x} + \sqrt[3]{4})$.

c) $x \in (-2 ; -1] \cup \left[-\dfrac{2}{3} ; \dfrac{1}{3}\right)$.

**4.100.** a) $x \in \left[3 ; \dfrac{6 + \sqrt{12}}{3}\right)$. *Hướng dẫn.* Phương trình viết thành

$$\sqrt{x - 1} > \sqrt{x - 2} + \sqrt{x - 3}$$

Với điều kiện $x \geq 3$, bình phương hai vế ta được bất phương trình tương đương

$$x - 1 > 2x - 5 + 2\sqrt{(x - 2)(x - 3)}$$

$$\Leftrightarrow 4 - x > 2\sqrt{(x - 2)(x - 3)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4 - x \geq 0 \\ (4 - x)^2 > 4(x - 2)(x - 3). \end{cases}$$

b) $x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$. *Hướng dẫn.* Đặt $t = \sqrt{x^2 - x + 1} \geq 0$.

Bất phương trình trở thành $2t^2 - t - 1 > 0$.

c) $x > 1$.

d) Viết bất phương trình về dạng :

$$\sqrt{\frac{(x - 1)(x + 1)}{x}} - \sqrt{\frac{x - 1}{x}} > \frac{x - 1}{x} \text{ hay } \sqrt{\frac{x - 1}{x}}(\sqrt{x + 1} - 1) > \frac{x - 1}{x}$$

Điều kiện : $-1 \leq x < 0$ hoặc $x \geq 1$.

Nhận thấy $x = 1$ không phải là nghiệm của bất phương trình nên có thể coi $x \neq 1$.

Khi đó $\frac{x-1}{x} > 0$ nên bất phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{x+1} - 1 > \sqrt{\frac{x-1}{x}} \Leftrightarrow \sqrt{x+1} > 1 + \sqrt{\frac{x-1}{x}} \qquad (*)$$

+ Nếu $-1 \leq x < 0$ thì $\sqrt{x+1} < 1$ suy ra bất phương trình không có nghiệm trong nửa khoảng $[-1 ; 0)$.

+ Với $x > 1$, bình phương hai vế của (*) ta đi đến :

$$(x-1) + \frac{1}{x} > 2\sqrt{\frac{x-1}{x}}$$

Mặt khác, theo bất đẳng thức Cô-si ta có

$$(x-1) + \frac{1}{x} \geq 2\sqrt{\frac{x-1}{x}}.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x - 1 = \frac{1}{x}$ tức là khi và chỉ khi $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Vậy $(x-1) + \frac{1}{x} > 2\sqrt{\frac{x-1}{x}} \Leftrightarrow 1 < x \neq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

*Kết luận.* Tập nghiệm của bất phương trình là

$$\left(1 ; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} ; +\infty\right).$$

**4.101.** a) $x \in (-\infty ; -\sqrt{6}) \cup (0 ; \sqrt{2}) \cup (2 + 2\sqrt{2}, +\infty)$.

b) $x \in \left(-\frac{5}{4} ; +\infty\right)$.

c) $x \in [3 ; 4) \cup (4, +\infty)$.

d) $x \in (1 ; 3)$.

**4.102.** a) $x < \frac{4}{3}$.

b) $x \in (-1 ; \sqrt[3]{4})$.

c) Điều kiện $|x+3| \neq 1 \Leftrightarrow x+3 \neq 1$ và $x+3 \neq -1$ hay $x \neq -2$ và $x \neq -4$.

* Nếu $x < -3$, bất phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{3}{-x-3-1} \geq -x-2 \Leftrightarrow \frac{3}{x+4} \leq x+2 \Leftrightarrow \frac{3}{x+4} - (x+2) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3-(x^2+6x+8)}{x+4} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{-x^2-6x-5}{x+4} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2+6x+5}{x+4} \geq 0$$

$\Leftrightarrow x \in [-5\,;\,-4)$.

* Nếu $-3 \leq x < -2$, bất phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{3}{x+2} \geq -x-2 \Leftrightarrow \frac{3}{x+2} + x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{3+(x+2)^2}{x+2} \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -2.$$

Không có $x$ thoả mãn yêu cầu điều kiện $-3 \leq x < -2$.

* Nếu $x > -2$, bất phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{3}{x+2} \geq x+2 \Leftrightarrow \frac{3}{x+2} - (x+2) \geq 0 \Leftrightarrow 3-(x+2)^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{3}-x-2)(\sqrt{3}+x+2) \geq 0 \Leftrightarrow -2-\sqrt{3} \leq x \leq 2-\sqrt{3}.$$

Vậy $-2 < x \leq 2-\sqrt{3}$.

*Kết luận.* $x \in [-5\,;\,-4) \cup (-2\,;\,2-\sqrt{3}]$.

d) Nếu $x < 2$ bất phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{9}{5-x-3} \geq -x+2 \Leftrightarrow \frac{9}{2-x} + x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{5-x^2+4x}{2-x} \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -1.$$

Nếu $2 \leq x < 5$ bất phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{9}{5-x-3} \geq x-2 \Leftrightarrow \frac{9}{2-x} + 2 - x \geq 0 \Leftrightarrow \frac{9+(2-x)^2}{2-x} \geq 0.$$

Vậy $2 < x < 5$.

Nếu $x > 5$ bất phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{9}{x-5-3} \geq x-2 \Leftrightarrow \frac{9}{x-8} \geq x-2 \Leftrightarrow \frac{9}{x-8} - (x-2) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{9-(x^2-10x+16)}{x-8} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{-x^2+10x-7}{x-8} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-10x+7}{x-8} \leq 0.$$

Vậy $8 < x \leq 5 + \sqrt{18}$.

Kết luận $x \in (-\infty ; -1] \cup (2 ; 5) \cup (8 ; 5 + \sqrt{18}]$.

**4.103.** a) Với $m = \sqrt{5}$ phương trình trở thành

$$-3\sqrt{5}x + \sqrt{5} + 1 = 0,$$

có nghiệm $x = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{3\sqrt{5}}$.

Với $m \neq \sqrt{5}$ phương trình có nghiệm khi và chỉ khi

$\Delta = 9m^2 - 4(m + 1)(m - \sqrt{5}) \geq 0 \Leftrightarrow 5m^2 - 4(1 - \sqrt{5})m + 4\sqrt{5} \geq 0$, bất phương trình này nghiệm đúng với mọi $m$ (vì $\Delta'_m = 4(1 - \sqrt{5})^2 - 20\sqrt{5} < 0$).

Vậy phương trình đã cho có nghiệm với mọi $m$.

b) $m \in (-1 ; \sqrt{5})$.

**4.104.** $m < 0$ : phương trình vô nghiệm

$m = 0$ : phương trình có hai nghiệm

$0 < m < 4$ : phương trình có bốn nghiệm

$m = 4$ : phương trình có ba nghiệm

$m > 4$ : phương trình có hai nghiệm.

**4.105.** Khi $m = 0$, dễ thấy phương trình đã cho có một nghiệm duy nhất $x = 0$.

Giả sử $m \neq 0$. Đặt $t = 1 - mx$, ta có $x = \dfrac{1 - t}{m}$ và ta được phương trình

$$m|t| = t^2 + (2m - 3)t + 2 - m. \tag{1}$$

Hiển nhiên phương trình đã cho có một nghiệm duy nhất khi và chỉ khi (1) có một nghiệm duy nhất. Ta có phương trình (1) tương đương với

$$\text{(I)} \begin{cases} t \geq 0 \\ t^2 + (m - 3)t + 2 - m = 0 \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad \text{(II)} \begin{cases} t < 0 \\ t^2 + (3m - 3)t + 2 - m = 0. \end{cases}$$

Ta xét các trường hợp sau

- Trường hợp $m > 2$. Lúc này mỗi phương trình bậc hai trong hệ (I) và (II) đều có hai nghiệm trái dấu, suy ra mỗi hệ (I) và (II) đều có một nghiệm, nghĩa là phương trình (1) có hai nghiệm (trái dấu). Vậy $m > 2$ không thoả mãn điều kiện của bài toán.

- Trường hợp $m \leq 2$. Lúc này phương trình bậc hai trong hệ (I) có hai nghiệm $t_1 = 1$ và $t_2 = 2 - m$. Do $m \leq 2$ nên cả hai nghiệm này đều thoả mãn điều kiện $t \geq 0$. Vậy nếu $t_1 \neq t_2$, tức là $m \neq 1$ thì hệ (I) có hai nghiệm phân biệt, tức là (1) có ít nhất hai nghiệm phân biệt, không thoả mãn yêu cầu của bài toán.

Cuối cùng, khi $m = 1$, dễ thấy hệ (I) có một nghiệm duy nhất $t = 1$, hệ (II) vô nghiệm nên phương trình (1) có một nghiệm duy nhất.

Tóm lại, các giá trị của $m$ thoả mãn yêu cầu đề bài là $m \in \{0 ; 1\}$.

**4.106.** a) Đúng.

b), c), d), e), f), g), h), i), k) sai. Học sinh tự lấy phản ví dụ.

**4.107.** Phương án (B).

**4.108.** Phương án (B).

**4.109.** Phương án (A).

**4.110.** Phương án (D).

**4.111.** Phương án (B).

**4.112.** Phương án (B).

**4.113.** Phương án (C).

**4.114.** Phương án (B).

**4.115.** a) ↔ (4) ; b) ↔ (1) ; c) ↔ (3) ; d) ↔ (2).

**4.116.** a) $m \boxed{<} 2$ ; b) $m \boxed{\leq} 2$ ;

c) $m \boxed{>} 2$ ; d) $m \boxed{\geq} 2$.

# Chương V

# THỐNG KÊ

## A. NHỮNG KIẾN THỨC CẦN NHỚ

- Một *dấu hiệu* là một vấn đề nào đó mà người điều tra quan tâm. Mỗi đối tượng điều tra gọi là một *đơn vị điều tra*. Mỗi đơn vị điều tra tương ứng với một số liệu gọi là *giá trị của dấu hiệu* trên đơn vị điều tra đó.

- Một tập con hữu hạn các đơn vị điều tra gọi là một *mẫu*. Tập hợp các số liệu thu được sau khi điều tra trên mẫu gọi là một *mẫu số liệu*.

- Bảng phân bố tần số gồm hai dòng (hoặc hai cột). Dòng (cột) đầu ghi các giá trị khác nhau của mẫu số liệu. Dòng (cột) thứ hai ghi tần số (số lần xuất hiện của mỗi giá trị trong mẫu số liệu) tương ứng. Nếu bổ sung một dòng (cột) thứ ba ghi tần suất (tỉ số % giữa tần số và kích thước mẫu) thì ta có bảng phân bố tần số - tần suất.

- Khi số liệu được ghép thành lớp, mỗi lớp gồm các số liệu nằm trong một đoạn (hay nửa khoảng) nào đó, ta có bảng phân bố tần số (tần số - tần suất) ghép lớp.

- Số trung bình được tính bởi công thức

$$\overline{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i .$$

- Phương sai được tính bởi công thức

$$s^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \frac{1}{N^2}\left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^2$$

$$s^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} (x_i - \overline{x})^2$$

Độ lệch chuẩn $s$ là căn bậc hai của phương sai.

- Nếu mẫu số liệu được cho dưới dạng một bảng phân bố tần số thì

$$\overline{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{m} n_i x_i ;$$

$$s^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{m} n_i x_i^2 - \frac{1}{N^2}\left(\sum_{i=1}^{m} n_i x_i\right)^2 ;$$

trong đó $n_i$ là tần số của số liệu $x_i$ $(i = 1, 2, ..., m)$, $\sum_{i=1}^{m} n_i = N$.

- Nếu mẫu số liệu được cho dưới dạng bảng tần số ghép lớp (Bảng 7a, 7b SGK) thì

$$\overline{x} \approx \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{m} n_i x_i ;$$

$$s^2 \approx \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{m} n_i x_i^2 - \frac{1}{N^2}\left(\sum_{i=1}^{m} n_i x_i\right)^2 ;$$

trong đó $n_i$ là tần số của lớp thứ $i$, $x_i$ là giá trị đại diện của lớp thứ $i$, tức là trung điểm của đoạn (hay nửa khoảng) ứng với lớp thứ $i$ $(i = 1, 2, ..., m)$.

- Số trung vị là giá trị thứ $\frac{N+1}{2}$ của mẫu số liệu nếu $N$ lẻ và là trung bình cộng của giá trị thứ $\frac{N}{2}$ và $\frac{N}{2} + 1$ nếu $N$ chẵn (khi xếp các giá trị của mẫu số liệu theo thứ tự tăng dần). Số trung vị được kí hiệu là $M_e$.
- Mốt là giá trị có tần số lớn nhất. Mốt được kí hiệu là $M_O$.

## B. ĐỀ BÀI

### §1. MỘT VÀI KHÁI NIỆM MỞ ĐẦU

### §2. TRÌNH BÀY MỘT MẪU SỐ LIỆU

Trong các bài tập của chương này, yêu cầu tính toán các số liệu làm tròn đến hàng phần trăm.

**5.1.** Giá bán của 80 lô đất (đơn vị triệu đồng) được ghi lại trong bảng phân bố tần số ghép lớp sau

| Lớp | Tần số |
|---|---|
| [79,5 ; 84,5) | 5 |
| [84,5 ; 89,5) | 10 |
| [89,5 ; 94,5) | 15 |
| [94,5 ; 99,5) | 26 |
| [99,5 ; 104,5) | 13 |
| [104,5 ; 109,5) | 7 |
| [109,5 ; 114,5) | 4 |

a) Bổ sung thêm cột tần suất ;

b) Vẽ biểu đồ tần số hình cột ;

c) Vẽ đường gấp khúc tần số.

**5.2.** Điều tra về số tiền mua sách trong một năm của 40 sinh viên ta có mẫu số liệu sau (đơn vị : nghìn đồng)

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 203 | 37 | 141 | 43 | 55 | 303 | 252 | 758 | 321 | 123 |
| 425 | 27 | 72 | 87 | 215 | 358 | 521 | 863 | 284 | 279 |
| 608 | 302 | 703 | 68 | 149 | 327 | 127 | 125 | 489 | 234 |
| 498 | 968 | 350 | 57 | 75 | 503 | 712 | 440 | 185 | 404. |

a) Hãy lập bảng phân bố tần số - tần suất ghép lớp gồm 10 lớp. Lớp đầu tiên là đoạn [0 ; 99], lớp thứ hai là đoạn [100 ; 199],.... (Độ dài mỗi đoạn là 99).

b) Hỏi có bao nhiêu phần trăm số sinh viên mua sách từ 500 ngàn đồng trở lên ?

c) Xét tốp 30% số sinh viên dùng nhiều tiền để mua sách nhất. Người mua ít nhất trong nhóm này mua hết bao nhiêu ?

**5.3.** Với mỗi tỉnh, người ta ghi lại số phần trăm những trẻ em mới sinh có trọng lượng dưới 2500 g. Sau đây là kết quả khảo sát ở 43 tỉnh (đơn vị :%).

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5,1 | 5,2 | 5,2 | 5,8 | 6,4 | 7,3 | 6,5 | 6,9 | 6,6 | 7,6 |
| 8,6 | 6,5 | 6,8 | 5,2 | 5,1 | 6,0 | 4,6 | 6,9 | 7,4 | 7,7 |
| 7,0 | 6,7 | 6,4 | 7,4 | 6,9 | 5,4 | 7,0 | 7,9 | 8,6 | 8,1 |
| 7,6 | 7,1 | 7,9 | 8,0 | 8,7 | 5,9 | 5,2 | 6,8 | 7,7 | 7,1 |
| 6,2 | 5,4 | 7,4. | | | | | | | |

a) Hãy lập bảng phân bố tần số tần suất ghép lớp gồm 5 lớp. Lớp thứ nhất là nửa khoảng [4,5 ; 5,5), lớp thứ hai là [5,5 ; 6,5),.... (Độ dài mỗi nửa khoảng là 1).

b)Vẽ biểu đồ tần số hình cột.

c) Vẽ biểu đồ tần suất hình quạt.

**5.4.** Doanh thu của 19 công ti trong năm vừa qua được cho như sau (đơn vị : triệu đồng)

|  |  |  |  |  |  |  |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 17638 | 16162 | 18746 | 16602 | 17357 | 15420 | 19630 |
| 18969 | 17301 | 18322 | 18870 | 17679 | 18101 | 16598 |
| 20275 | 19902 | 17733 | 18405 | 18739 |  |  |

a) Lập bảng phân bố tần số tần suất ghép lớp, sử dụng sáu lớp [15 000 ; 16 000) ; [16 000 ; 17 000),..., [20 000 ; 21 000).

b)Vẽ biểu đồ tần số hình cột ;

c)Vẽ đường gấp khúc tần số.

**5.5.** Kết quả của một kì thi môn Tiếng Anh của 32 học sinh được cho trong mẫu số liệu sau (thang điểm 100) :

|  |  |  |  |  |  |  |  |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 68 | 52 | 49 | 56 | 69 | 74 | 41 | 59 |
| 79 | 61 | 42 | 57 | 60 | 88 | 87 | 47 |
| 65 | 55 | 68 | 65 | 50 | 78 | 61 | 90 |
| 86 | 65 | 66 | 72 | 63 | 95 | 72 | 74. |

a) Lập bảng phân bố tần số - tần suất ghép lớp, sử dụng sáu lớp :

$$[40 ; 50) ; [50 ; 60) ; \ldots ; [90 ; 100).$$

b) Vẽ biểu đồ tần số hình cột.

c) Vẽ biểu đồ tần suất hình cột.

## §3 CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG CỦA MẪU SỐ LIỆU

Trong các bài tập dưới đây, yêu cầu tính các số trung bình, số trung vị, phương sai, độ lệch chuẩn (chính xác đến hàng phần trăm).

**5.6.** Doanh thu của 8 cửa hàng ăn trong một ngày ở khu phố *A* (đơn vị triệu đồng) như sau :

2  2  25  2  10  100  2  10.

Tìm số trung bình và số trung vị. Số nào làm đại diện tốt hơn ?

**5.7.** Một câu lạc bộ thiếu nhi trong dịp hè có mở 7 lớp ngoại khoá. Sĩ số của các lớp tương ứng là :

43 41 52 13 21 39 46.

Tìm số trung bình và số trung vị.

**5.8.** Giá bán của 60 mặt hàng ở một cửa hàng được thống kê trong bảng tần số ghép lớp sau đây (đơn vị : nghìn đồng).

| Lớp | Tần số |
|---|---|
| [40 ; 49] | 3 |
| [50 ; 59] | 6 |
| [60 ; 69] | 19 |
| [70 ; 79] | 23 |
| [80 ; 89] | 9 |
| | $N = 60$ |

Tính số trung bình.

**5.9.** Tuổi các học viên của một lớp học tiếng Anh buổi tối ở một trung tâm được ghi lại trong bảng tần số ghép lớp sau

| Lớp | Tần số |
|---|---|
| [15 ; 19] | 10 |
| [20 ; 24] | 12 |
| [25 ; 29] | 14 |
| [30 ; 34] | 9 |
| [35 ; 39] | 5 |

Tính số trung bình.

**5.10.** Nghiên cứu mức tiêu thụ xăng của một loại ô tô, một công ti chế tạo ô tô ở Mĩ đã cho 35 xe chạy thử và xác định xem với 1 galông xăng (1galông = 4,546 lít), một xe chạy được bao nhiêu dặm (1 dặm = 1,609 km). Kết quả được cho trong bảng tần số ghép lớp sau đây.

| Lớp | Tần số |
|---|---|
| [20 ; 24] | 2 |
| [25 ; 29] | 7 |
| [30 ; 34] | 15 |
| [35 ; 39] | 8 |
| [40 ; 44] | 3 |

Tính số trung bình và độ lệch chuẩn.

**5.11.** Số tiền cước phí điện thoại (đơn vị : nghìn đồng) của 7 gia đình trong khu phố *A* phải trả được ghi lại như sau :

83 79 92 71 69 83 74.

Tính số trung bình, số trung vị, mốt và độ lệch chuẩn.

**5.12.** Thời điểm mà các nhân viên của một công ti ngủ dậy mỗi buổi sáng được thống kê trong bảng phân bố tần suất ghép lớp sau (đơn vị : giờ) :

| Lớp | Tần suất (%) |
|---|---|
| [4 ; 5] | 7 |
| [5 ; 6] | 65 |
| [6 ; 7] | 24 |
| [7 ; 8] | 4 |

Tính số trung bình.

**5.13.** Số người cấp cứu đến bệnh viện *A* trong hai ngày thứ hai và thứ sáu được cho trong bảng tần số ghép lớp dưới đây.

| Lớp | Tần số (trong ngày thứ hai) | Tần số (trong ngày thứ sáu) |
|---|---|---|
| [4 ; 7] | 1 | 1 |
| [8 ; 11] | 4 | 4 |
| [12 ; 15] | 15 | 21 |
| [16 ; 19] | 26 | 22 |
| [20 ; 23] | 16 | 13 |
| [24 ; 27] | 7 | 3 |
| [28 ; 31] | 3 | 0 |
|  | $N = 72$ | $N = 64$ |

Tính số trung bình và độ lệch chuẩn của hai mẫu số liệu và so sánh độ phân tán của chúng.

**5.14.** Số tiền điện phải trả của 50 hộ trong khu phố *A* được thống kê trong bảng phân bố tần số sau đây (đơn vị nghìn đồng).

| Lớp | Tần số |
|---|---|
| [375 ; 449] | 6 |
| [450 ; 524] | 15 |
| [525 ; 599] | 10 |
| [600 ; 674] | 6 |
| [675 ; 749] | 9 |
| [750 ; 824] | 4 |
| | $N = 50$ |

Tính số trung bình và độ lệch chuẩn.

**5.15.** Trong một đề tài nghiên cứu về bệnh *A*, người ta ghi lại tuổi của 50 bệnh nhân mắc bệnh này. Số liệu thống kê được trình bày trong bảng phân bố tần số sau đây.

| Lớp | Tần số |
|---|---|
| [15 ; 19] | 10 |
| [20 ; 24] | 12 |
| [25 ; 29] | 14 |
| [30 ; 34] | 9 |
| [35 ; 39] | 5 |
| | $N = 50$ |

Tính số trung bình và độ lệch chuẩn.

**5.16.** Một cửa hàng sách thống kê số tiền (đơn vị : nghìn đồng) mà 60 khách hàng mua sách ở cửa hàng trọng một ngày. Số liệu được ghi trong bảng phân bố tần số sau :

| Lớp | Tần số |
|---|---|
| [40 ; 49] | 3 |
| [50 ; 59] | 6 |
| [60 ; 69] | 19 |
| [70 ; 79] | 23 |
| [80 ; 89] | 9 |
| | $N = 60$ |

Tính số trung bình và độ lệch chuẩn.

**5.17.** Người ta chọn một số bút bi của hai hãng sản xuất $A$ và $B$ và thử xem sử dụng một bút sau bao nhiêu giờ thì hết mực. Kết quả như sau (đơn vị giờ) :

Loại bút $A$ : 23 25 27 28 30 35.

Loại bút $B$ : 16 22 28 33 46.

a) Tính số trung bình và độ lệch chuẩn về thời gian sử dụng của mỗi loại bút.

b) Giả sử hai loại bút $A$ và $B$ có cùng một giá. Dựa vào sự khảo sát trên, ta nên quyết định mua loại bút nào.

**5.18.** Khối lượng (đơn vị : pound ; 1 pound = 0,454 kg) của một nhóm người tham gia câu lạc bộ sức khoẻ được ghi lại như sau :

175 166 148 183 206 190 128 147 156 166 174 158 196
120 165 189 174 148 225 192 177 154 140 180 172 135.

Tính số trung bình, số trung vị và mốt.

**5.19.** Vận tốc (dặm/h ; 1dặm = 1,609 km) của 400 xe ôtô chạy trên con đường $A$ được ghi lại trong bảng tần số ghép lớp sau :

| Lớp | Tần số |
|---|---|
| [27,5 ; 32,5) | 18 |
| [32,5 ; 37,5) | 76 |
| [37,5 ; 42,5) | 200 |
| [42,5 ; 47,5) | 100 |
| [47,5 ; 52,5) | 6 |
| | $N = 400$ |

Tính số trung bình, độ lệch chuẩn.

**5.20.** Một cửa hàng ăn ghi lại số tiền (nghìn đồng) mà mỗi khách trả cho cửa hàng. Các số liệu được trình bày trong bảng tần số ghép lớp sau :

| Lớp | Tần số |
|---|---|
| [0 ; 99] | 20 |
| [100 ; 199] | 80 |
| [200 ; 299] | 70 |
| [300 ; 399] | 30 |
| [400 ; 499] | 10 |
| | $N = 210$ |

Tính số trung bình và độ lệch chuẩn.

**5.21.** Điểm trung bình thi học kì môn Toán của học sinh nam và nữ của hai trường $A$ và $B$ cũng như của mỗi trường được thống kê trong bảng sau :

| Trường | Nam | Nữ | Nam và nữ |
|---|---|---|---|
| $A$ | 7,1 | 7,6 | 7,4 |
| $B$ | 8,1 | 9,0 | 8,4 |
| $A$ và $B$ | 7,9 | | |

Tính điểm trung bình của học sinh cả hai trường $A$ và $B$ (chính xác tới hàng phần chục).

## BÀI TẬP ÔN TẬP CHƯƠNG V

**5.22.** Chiều cao của một mẫu gồm 120 cây được trình bày trong bảng phân bố tần số ghép lớp sau đây (đơn vị : m) :

| Lớp | Tần số |
|---|---|
| [1,7 ; 1,9) | 4 |
| [1,9 ; 2,1) | 11 |
| [2,1 ; 2,3) | 26 |
| [2,3 ; 2,5) | 21 |
| [2,5 ; 2,7) | 17 |
| [2,7 ; 2,9) | 11 |
| [2,9 ; 3,1) | 7 |
| [3,1 ; 3,3) | 6 |
| [3,3 ; 3,5) | 7 |
| [3,5 ; 3,7) | 3 |
| [3,7 ; 3,9) | 5 |
| [3,9 ; 4,1) | 2 |
| | $N = 120$ |

a) Vẽ biểu đồ tần số hình cột.

b) Vẽ đường gấp khúc tần số.

c) Dựa trên hai biểu đồ này, có nhận xét gì về xu thế phân bố chiều cao của cây ? Phần lớn số cây có chiều cao nằm trong khoảng nào ?

**5.23.** Trong tất cả các mẫu số liệu kích thước 5 với số trung vị là 12 và số trung bình là 10, hãy tìm một mẫu số liệu có biên độ nhỏ nhất (biên độ của mẫu số liệu là hiệu giữa giá trị lớn nhất và bé nhất của mẫu số liệu).

**5.24.** Một công ti có 45 chiếc xe. Mức tiêu thụ xăng (đơn vị : lít) của mỗi xe trong tuần qua được ghi lại như sau :

123 132 130 119 106 97 121 109 118

128 132 115 130 125 121 127 144 115

107 110 112 118 115 134 132 139 144

104 128 138 114 121 129 128 116 138

129 113 105 142 122 131 126 111 142

a) Lập bảng phân bố tần số ghép lớp với các lớp là :

[90 ; 100), [100 ; 110),..., [140 ;150).

b) Tính số trung bình và số trung bình (xấp xỉ) dựa trên bảng phân bố tần số ghép lớp.

c) Tính số trung vị.

## GIỚI THIỆU MỘT SỐ CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN

*Trong các bài từ 5.25 đến 5.26, hãy chọn phương án trả lời đúng trong các phương án đã cho.*

**5.25.** Bảng phân bố tần số sau đây ghi lại số ghế trống trong các chuyến bay từ Hà Nội đến Tp. Hồ Chí Minh.

| Lớp | Tần số |
|---|---|
| [0 ; 4] | 3 |
| [5 ; 9] | 8 |
| [10 ;14] | 15 |
| [15 ; 19] | 18 |
| [20 ; 24] | 12 |
| [25 ; 29] | 6 |

Tỉ lệ phần trăm số chuyến bay có nhiều nhất 19 ghế trống xấp xỉ là

(A) 15% ; (B) 29% ;

(C) 71% ; (D) Không thể xác định được từ bảng trên.

**5.26.** Giả sử kích thước mẫu là $N$. Khi đó luôn có $\left[\frac{N}{2}\right]$(phần nguyên của $\frac{N}{2}$) số liệu trong mẫu lớn hơn hoặc bằng

(A) Số trung bình ; (B) Số trung vị ;

(C) Mốt ; (D) Độ lệch chuẩn.

**5.27.** Chọn khẳng định sai trong các khẳng định sau về số trung bình $\overline{x}$

(A) Tất cả các số liệu trong mẫu đều phải dùng để tính số trung bình $\overline{x}$ ;

(B) Số trung bình $\overline{x}$ bị ảnh hưởng bởi các giá trị quá lớn hay quá bé ;

(C) Tổng $\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x}) = 0$ ;

(D) Một nửa số liệu trong mẫu lớn hơn hoặc bằng $\overline{x}$ .

**5.28.** Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau về số trung vị $M_e$

(A) Số trung vị luôn là một số liệu nào đó của mẫu ;

(B) Số trung vị bị ảnh hưởng bởi các giá trị quá lớn hay quá bé ;

(C) Tổng $\sum_{i=1}^{N}(x_i - M_e) = 0$.

(D) Có $\left[\frac{N}{2}\right]$ số liệu lớn hơn hoặc bằng $M_e$, ở đó $N$ là kích thước mẫu.

*Trong các bài từ 5.29 đến 5.33, hãy chọn phương án trả lời đúng trong các phương án đã cho.*

**5.29.** Các giá trị xuất hiện nhiều nhất trong mẫu số liệu được gọi là

(A) Mốt ; (B) Số trung bình ;

(C) Số trung vị ; (D) Độ lệch chuẩn.

**5.30.** Nếu đơn vị đo của số liệu là kg thì đơn vị của độ lệch chuẩn là

(A) kg ; (B) $\text{kg}^2$ ;

(C) Không có đơn vị (hư số) ; (D) kg/2.

**5.31.** Một học sinh ghi lại bảng phân bố tần suất của một mẫu số liệu như sau

| Giá trị($x$) | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Tần số | | | | | | $N$ = |
| Tần suất (%) | 12,5 | 0,0 | 50,0 | 25,0 | 12,5 | 100 |

Tuy nhiên, em đó quên ghi kích thước mẫu $N$. Khi đó, giá trị nhỏ nhất có thể có của $N$ là

(A) 5 ; (B) 8 ; (C) 16 ; (D) 25.

**5.32.** Cho $X$, $Y$, $Z$ là ba mẫu số liệu đôi một không có phần tử chung. Số trung bình của các mẫu số liệu $X$, $Y$, $Z$, $X \cup Y$, $X \cup Z$ và $Y \cup Z$ được cho trong bảng dưới đây.

| Mẫu | $X$ | $Y$ | $Z$ | $X \cup Y$ | $X \cup Z$ | $Y \cup Z$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Số trung bình | 37 | 23 | 41 | 29 | 39,5 | 33 |

Khi đó, số trung bình của mẫu $X \cup Y \cup Z$ là

(A) 33 ; (B) 33,5 ; (C) 33,66 ; (D) 34.

**5.33.** Học sinh tỉnh $A$ (gồm lớp 11 và lớp 12) tham dự kì thi học sinh giỏi Toán của Tỉnh (thang điểm 20) và điểm trung bình của họ là 10. Biết rằng số học sinh lớp 11 nhiều hơn số học sinh lớp 12 là 50% và điểm trung bình của khối 12 cao hơn điểm trung bình của khối 11 là 50%. Điểm trung bình của khối 12 là

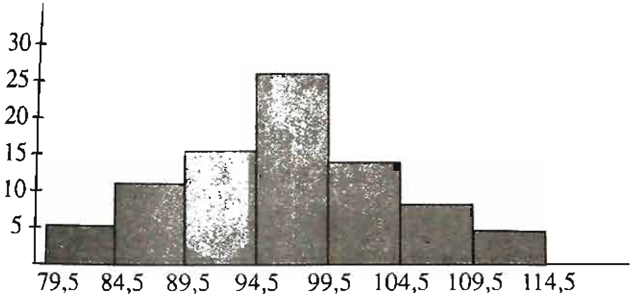
(A) 10 ; (B) 11,25 ; (C) 12,5 ; (D) 15.

## C. ĐÁP SỐ – HƯỚNG DẪN – LỜI GIẢI

**5.1.** a) Bổ sung cột tần suất, ta được

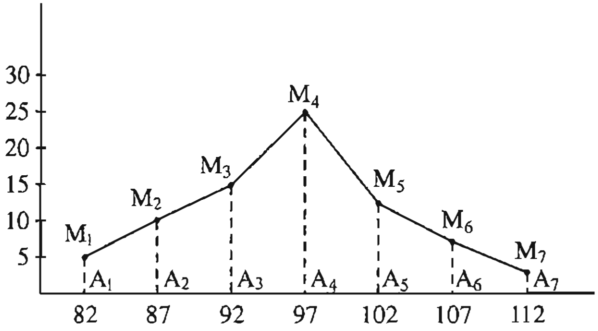
| Lớp | Giá trị đại diện | Tần số | Tần suất (%) |
|---|---|---|---|
| [79,5 ; 84,5) | 82 | 5 | 6,25 |
| [84,5 ; 89,5) | 87 | 10 | 12,50 |
| [89,5 ; 94,5) | 92 | 15 | 18,75 |
| [94,5 ; 99,5) | 97 | 26 | 32,50 |
| [99,5 ; 104,5) | 102 | 13 | 16,25 |
| [104,5 ; 109,5) | 107 | 7 | 8,75 |
| [109,5 ; 114,5) | 112 | 4 | 5,00 |
| | | $N = 80$ | |

b) Biểu đồ tần số hình cột (h.5.1)



*Hình 5.1*

c) Đường gấp khúc tần số (h.5.2)



*Hình 5.2*

**5.2.** a) Bảng phân bố tần số - tần suất ghép lớp :

| Lớp | Tần số | Tần suất(%) |
|---|---|---|
| [0 ; 99] | 9 | 22,5 |
| [100 ; 199] | 6 | 15,0 |
| [200 ; 299] | 6 | 15,0 |
| [300 ; 399] | 6 | 15,0 |
| [400 ; 499] | 5 | 12,5 |
| [500 ; 599] | 2 | 5,0 |
| [600 ; 699] | 1 | 2,5 |
| [700 ; 799] | 3 | 7,5 |
| [800 ; 899] | 1 | 2,5 |
| [900 ; 999] | 1 | 2,5 |
| | $N = 40$ | |

b) Nhìn vào bảng trên, ta tính được tỉ lệ sinh viên mua từ 500 ngàn trở lên là 5% + 2,5% + 2,5% + 2,5% + 7,5% = 20%.

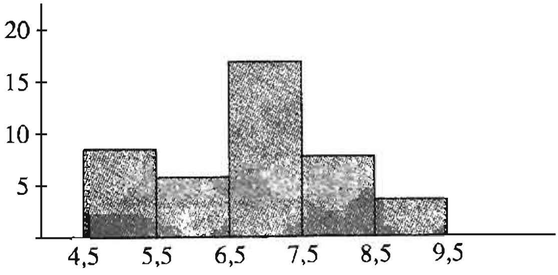
c) Xét tốp 30% số sinh viên mua nhiều tiền nhất. Nhóm này có $40 \times \frac{30}{100} = 12$ sinh viên. Có tám sinh viên tiêu từ 500 ngàn trở lên. Ta cần chọn thêm bốn sinh viên nữa trong nhóm thứ 5, nhóm tiêu tiền trong đoạn [400 ; 499] ; năm số liệu trong nhóm này là 498 ; 489 ; 440 ; 425 và 404. Do đó, người mua ít nhất là 425 nghìn đồng.

**5.3.** a) Bảng phân bố tần số - tần suất ghép lớp

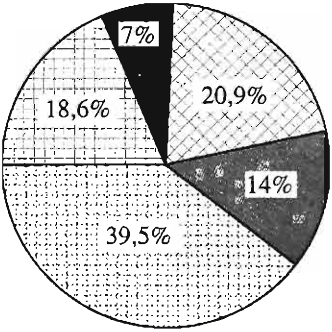
| Lớp | Tần số | Tần suất (%) |
|---|---|---|
| [4,5 ; 5,5) | 9 | 20,93 |
| [5,5 ; 6,5) | 6 | 13,95 |
| [6,5 ; 7,5) | 17 | 39,53 |
| [7,5 ; 8,5) | 8 | 18,60 |
| [8,5 ; 9,5) | 3 | 6,98 |
|  | $N = 43$ |  |

b) Biểu đồ tần số hình cột (h.5.3)

c) Biểu đồ tần suất hình quạt (h.5.4)



*Hình 5.3*

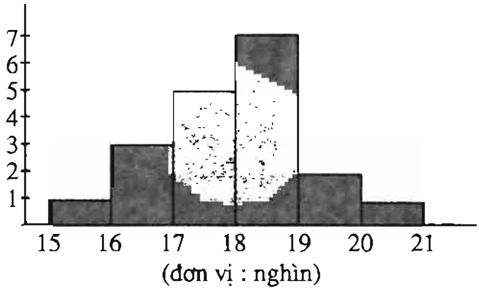


*Hình 5.4*

**5.4.** a) Bảng phân bố tần số - tần suất ghép lớp

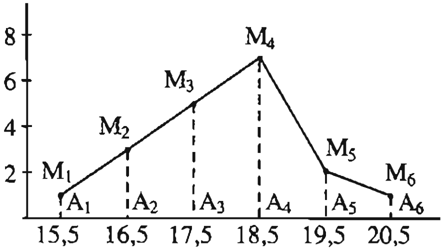
| Lớp | Giá trị đại diện | Tần số | Tần suất (%) |
|---|---|---|---|
| [15 000 ; 16 000) | 15 500 | 1 | 5,26 |
| [16 000 ; 17 000) | 16 500 | 3 | 15,79 |
| [17 000 ; 18 000) | 17 500 | 5 | 26,32 |
| [18 000 ; 19 000) | 18 500 | 7 | 36,84 |
| [19 000 ; 20 000) | 19 500 | 2 | 10,53 |
| [20 000 ; 21 000) | 20 500 | 1 | 5,26 |

b) Biểu đồ tần số hình cột (h.5.5)



*Hình 5.5*

c) Đường gấp khúc tần số (h.5.6)

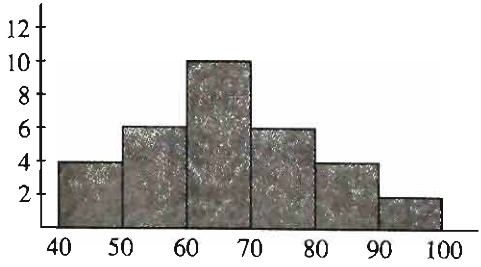


*Hình 5.6*

**5.5.** a) Bảng phân bố tần số – tần suất ghép lớp

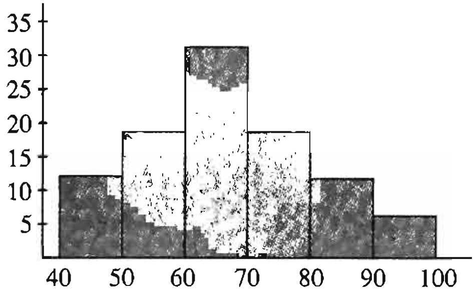
| Lớp | Tần số | Tần suất(%) |
|---|---|---|
| [40 ; 50) | 4 | 12,50 |
| [50 ; 60) | 6 | 18,75 |
| [60 ; 70) | 11 | 34,38 |
| [70 ; 80) | 6 | 18,75 |
| [80 ; 90) | 3 | 9,38 |
| [90 ; 100) | 2 | 6,25 |
|  | $N = 32$ |  |

b) Biểu đồ tần số hình cột (h.5.7)



*Hình 5.7*

c) Biểu đồ tần suất hình cột (h.5.8)



*Hình 5.8*

**5.6.** Số trung bình 19,13. Số trung vị là 6. Số trung vị làm đại diện tốt hơn vì có sự chênh lệch lớn giữa các số liệu trong mẫu.

**5.7.** Số trung bình là 36,43. Số trung vị là 41.

**5.8.** Số trung bình là 69,33.

**5.9.** Số trung bình là 25,7.

**5.10.** Số trung bình là 32,43. Phương sai là 24,82. Độ lệch chuẩn là 4,98.

**5.11.** Số trung bình là 78,71. Số trung vị là 79. Mốt là 83. Phương sai là 55,63. Độ lệch chuẩn là 7,46.

**5.12.** Từ công thức tính số trung bình ta thấy

$$\overline{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{m} x_i n_i = \sum_{i=1}^{m} \frac{n_i}{N} x_i = \sum_{i=1}^{m} f_i x_i .$$

Thay vào công thức trên ta thu được số trung bình là 5,75 giờ tức là 5 giờ 45 phút.

**5.13.** Đối với mẫu số liệu số người cấp cứu trong ngày thứ hai : Số trung bình là 18,43 và độ lệch chuẩn là 4,73.

Đối với mẫu số liệu số người cấp cứu trong ngày thứ sáu : Số trung bình là 16,69 và độ lệch chuẩn là 4,13.

Độ phân tán của mẫu số liệu số người cấp cứu trong ngày thứ sáu nhỏ hơn.

**5.14.** Số trung bình là 576,1. Độ lệch chuẩn là 113,08.

**5.15.** Số trung bình là 25,7. Độ lệch chuẩn là 6,23.

**5.16.** Số trung bình là 69,33. Độ lệch chuẩn là 10,25.

**5.17.** Loại bút $A$ : Số trung bình là 28 giờ ; Độ lệch chuẩn là 3,83 giờ.

Loại bút $B$ : Số trung bình là 29 giờ ; Độ lệch chuẩn là 10,24 giờ.

Loại bút $B$ có thời gian sử dụng trung bình lâu hơn. Tuy nhiên, do độ lệch chuẩn lớn hơn nên chất lượng của bút $B$ không đồng đều. Nếu không may bạn có thể mua phải chiếc bút có thời gian sử dụng rất thấp.

**5.18.** Số trung bình là 167,8 pound ; Số trung vị là 169 pound. Mốt có ba giá trị là 148 pound, 166 pound và 174 pound.

**5.19.** Số trung bình là 40 dặm/h. Độ lệch chuẩn là 4,12 dặm/h.

**5.20.** Số trung bình là 216,17. Độ lệch chuẩn là 99,20.

**5.21.** Gọi số học sinh nam trường $A$ là $a$ ; số học sinh nữ trường $A$ là $a'$ ; số học sinh nam trường $B$ là $b$ ; số học sinh nữ trường $B$ là $b'$.

Tổng số điểm của học sinh nam trường $A$ là $S(A) = 7{,}1a$.

Tổng số điểm của học sinh nữ trường $A$ là $S'(A) = 7{,}6a'$.

Tổng số điểm của học sinh toàn trường $A$ là $S(A) + S'(A) = 7{,}4(a + a')$. Suy ra

$7{,}1a + 7{,}6a' = 7{,}4a + 7{,}4a'$ Từ đó $0{,}2a' = 0{,}3a$ hay $a' = 1{,}5a$. (1)

Tổng số điểm của học sinh nam trường $B$ là $S(B) = 8{,}1\ b$.

Tổng số điểm của học sinh nữ trường $B$ là $S'(B) = 9{,}0\ b'$.

Tổng số điểm của học sinh toàn trường $B$ là $S(B) + S'(B) = 8{,}4\ (b + b')$. Suy ra

$8{,}1b + 9{,}0b' = 8{,}4b + 8{,}4b'$. Từ đó $0{,}6b' = 0{,}3b$ hay $b' = 0{,}5b$. (2)

Tổng số điểm mà học sinh nam của hai trường $A$ và $B$ nhận được là

$S(A) + S(B) = 7{,}9(a + b)$. Suy ra $7{,}1a + 8{,}1b = 7{,}9a + 7{,}9b$. Từ đó $0{,}2b = 0{,}8a$ hay $b = 4a$. (3)

Từ (2) và (3) suy ra $b' = 2a$.

Tổng số điểm của học sinh cả hai trường $A$ và $B$ là

$$S(A) + S(B) + S'(A) + S'(B) = 7{,}4(a + a') + 8{,}4(b + b')$$

$$= 7{,}4a + 7{,}4.1{,}5a + 8{,}4.4a + 8{,}4.2a = 68{,}9a.$$

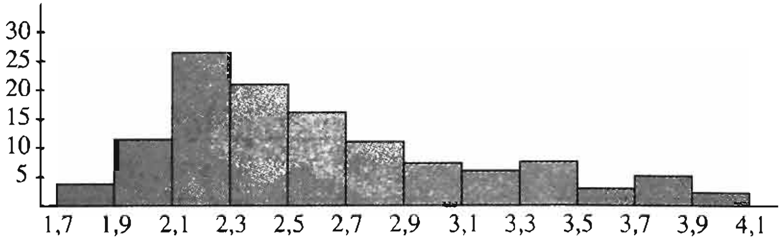
Số học sinh cả hai trường $A$ và $B$ là $a + a' + b + b' = a + 1{,}5a + 4a + 2a = 8{,}5a$.

Vậy điểm trung bình của học sinh hai trường là $\dfrac{68{,}9a}{8{,}5a} \approx 8{,}11$.

**5.22.** Ta có

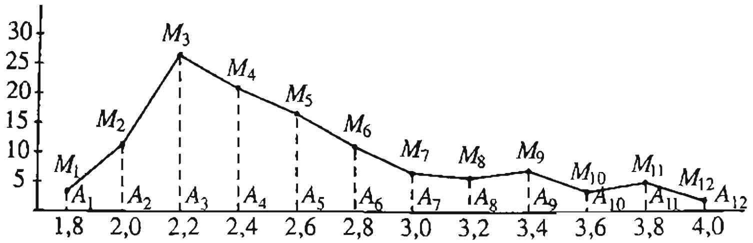
| Lớp | Giá trị đại diện | Tần số | Tần suất(%) |
|---|---|---|---|
| [1,7 ; 1,9) | 1,8 | 4 | 3,33 |
| [1,9 ; 2,1) | 2,0 | 11 | 9,17 |
| [2,1 ; 2,3) | 2,2 | 26 | 21,67 |
| [2,3 ; 2,5) | 2,4 | 21 | 17,50 |
| [2,5 ; 2,7) | 2,6 | 17 | 14,17 |
| [2,7 ; 2,9) | 2,8 | 11 | 9,17 |
| [2,9 ; 3,1) | 3,0 | 7 | 5,83 |
| [3,1 ; 3,3) | 3,2 | 6 | 5,00 |
| [3,3 ; 3,5) | 3,4 | 7 | 5,83 |
| [3,5 ; 3,7) | 3,6 | 3 | 2,50 |
| [3,7 ; 3,9) | 3,8 | 5 | 4,17 |
| [3,9 ; 4,1) | 4,0 | 2 | 1,67 |
|  |  | $N = 120$ |  |

a) Biểu đồ tần số hình cột (h.5.9)



*Hình 5.9*

b) Đường gấp khúc tần số (h.5.10)



*Hình 5.10*

c) Nhìn vào bảng trên ta thấy : Chiều cao của cây nằm trong khoảng từ 1,7m đến 4,1m. Có 53,34% số cây có chiều cao từ 2,1m đến 2,7m và có 88,34% số cây có chiều cao từ 1,9m đến 3,5m.

**5.23.** Giả sử $a \leq b \leq m \leq c \leq d$ là mẫu số liệu kích thước 5 và có số trung bình là 10 và số trung vị là 12. Từ giả thiết suy ra $m = 12$ và $a + b + c + d = 38$.

Vì $c + d \geq 12 + 12 = 24$ nên $a + b = 38 - (c + d) \leq 38 - 24 = 14$. Vì $a \leq b$ nên suy ra $2a \leq a + b \leq 14$. Vậy $a \leq 7$. Khi đó, biên độ $B = d - a \geq 12 - 7 = 5$.

Mẫu số liệu {7 ; 7 ; 12 ; 12 ; 12} có số trung bình là 10 và số trung vị là 12 với biên độ 5. Đó chính là mẫu số liệu có biên độ bé nhất trong số các mẫu số liệu kích thước 5 với số trung bình 10 và số trung vị 12.

**5.24.** a) Bảng phân bố tần số ghép lớp

| Lớp | Giá trị đại diện | Tần số |
|---|---|---|
| [90 ; 100) | 95 | 1 |
| [100 ; 110) | 105 | 5 |
| [110 ; 120) | 115 | 12 |
| [120 ; 130) | 125 | 13 |
| [130 ; 140) | 135 | 10 |
| [140 ; 150) | 145 | 4 |
| | | $N = 45$ |

b) Từ đó tính được số trung bình (tính theo bảng phân bố ghép lớp) là 123,44 lít. Nếu tính đúng trên mẫu số liệu (khi không ghép lớp) thì số trung bình là 123,11 lít.

c) Để tính số trung vị, ta sắp xếp các số liệu trên theo thứ tự tăng dần như sau :

97 104 105 106 107 109 110 111 112
113 114 115 115 115 116 118 118 119
121 121 121 122 123 125 126 127 128
128 128 129 129 130 130 131 132 132
132 134 138 138 139 142 142 144 144.

Từ đó số trung vị $M_e = 123$.

**5.25.** (C).

**5.26.** (B).

**5.27.** (D).

**5.28.** (D).

**5.29.** (A).

**5.30.** (A).

**5.31.** (B). *Hướng dẫn :*

Số liệu có giá trị 0 và 4 có tần số là $N\,\frac{12,5}{100} = \frac{N}{8}$ Do đó, $N$ phải chia hết cho 8. Số liệu có giá trị 2 có tần số là $N.\frac{50}{100} = \frac{N}{2}$ và số liệu có giá trị 3 là $N.\frac{25}{100} = \frac{N}{4}$ Do đó, $N$ phải chia hết cho 8 ; 4 ; 2, tức là phải chia hết cho BCNN (bội chung nhỏ nhất) của 8 ; 4 ; 2. Mà BCNN của 8 ; 4 ; 2 là 8. Do đó, $N$ phải chia hết cho 8. Vậy giá trị nhỏ nhất của $N$ là 8.

**5.32.** (D). *Hướng dẫn :*

Kí hiệu $n$, $m$ và $k$ tương ứng là kích thước của mẫu $X$, $Y$ và $Z$ ; $S(X)$, $S(Y)$ và $S(Z)$ tương ứng là tổng tất cả các giá trị của số liệu trong mẫu $X$, $Y$ và $Z$. Theo bài ra ta có

$S(X) = 37n$, $S(Y) = 23m$, $S(Z) = 41k$ và $S(X) + S(Y) = (n + m)29$. Suy ra

$$37n + 23m = 29n + 29m.\text{ Từ đó } 8n = 6m \text{ hay } n = 0,75m.$$

Tương tự, vì $S(Y) + S(Z) = (m + k)33$ nên suy ra

$$23m + 41k = 33m + 33k.\text{ Từ đó } 8k = 10m \text{ hay } k = 1,25m.$$

Tổng tất cả các giá trị của số liệu trong mẫu $X \cup Y \cup Z$ là

$$S(X) + S(Y) + S(Z) = 37n + 23m + 41k$$

$$= 37.0{,}75m + 23m + 41.1{,}25m = 102m.$$

Kích thước của mẫu $X \cup Y \cup Z$ là

$$n + m + k = 0{,}75\,m + m + 1{,}25m = 3m.$$

Vậy số trung bình của mẫu $X \cup Y \cup Z$ là $\dfrac{102m}{3m} = 34$.

**5.33.** (C). *Hướng dẫn :*

Gọi số học sinh lớp 12 là $n$. Theo bài ra, số học sinh lớp 11 sẽ là $1{,}5n$.

Gọi điểm trung bình của học sinh lớp 11 là $a$. Theo bài ra, điểm trung bình của học sinh lớp 12 là $1{,}5a$.

Tổng số điểm của học sinh lớp 11 là $S = a.1{,}5n = 1{,}5an$.

Tổng số điểm của học sinh lớp 12 là $T = (1{,}5a)\,n = 1{,}5an$.

Vậy tổng số điểm của học sinh lớp 11 và 12 là $1{,}5an + 1{,}5an = 3an$.

Mặt khác, ta có tổng số học sinh lớp 11 và 12 là $n + 1{,}5n = 2{,}5n$ và điểm trung bình của lớp 11 và 12 là 10. Do đó, tổng số điểm của học sinh lớp 11 và 12 là $10.(2{,}5n) = 25n$.

Từ đó ta có $3an = 25n$ hay $a = \dfrac{25}{3}$

Vậy điểm trung bình của học sinh lớp 12 là $1{,}5a = 1{,}5.\dfrac{25}{3} = 12{,}5$.

# Chương VI

# GÓC LƯỢNG GIÁC VÀ CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

## A. NHỮNG KIẾN THỨC CẦN NHỚ

### 1. Cung tròn. Quan hệ giữa độ và rađian

Cung tròn bán kính $R$ có số đo rađian $\alpha$ $(0 \le \alpha \le 2\pi)$, có số đo $a^0$ $(0 \le a \le 360)$, có độ dài $l$ thì :

$$\frac{\alpha}{\pi} = \frac{a}{180},\ l = R\alpha.$$

### 2. Công thức lượng giác cơ bản

$\sin(\alpha + k2\pi) = \sin\alpha$ $\qquad$ $\cos(\alpha + k2\pi) = \cos\alpha$

$\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ $\qquad$ $\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \dfrac{1}{\tan\alpha}$

$\tan(\alpha + k\pi) = \tan\alpha$ $\qquad$ $\cot(\alpha + k\pi) = \cot\alpha$

$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ $\qquad$ $1 + \tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$

$1 + \cot^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$

### 3. Giá trị lượng giác của các góc (cung) có liên quan đặc biệt

$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ $\qquad$ $\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha$ $\qquad$ $\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$

$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ $\qquad$ $\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$ $\qquad$ $\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$

$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$ $\qquad$ $\tan(\pi + \alpha) = \tan\alpha$ $\qquad$ $\tan(\pi - \alpha) = -\tan\alpha$

$\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$ $\qquad$ $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$ $\qquad$ $\tan\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot\alpha$

## 4. Một số công thức lượng giác

- **Công thức cộng**

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

- **Công thức nhân đôi**

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha\ ;$$

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha\ ;$$

$$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}.$$

- **Công thức hạ bậc**

$$\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}\ ;\quad \sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}.$$

- **Công thức biến đổi tích thành tổng**

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$$

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$$

$$\sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)]$$

- **Công thức biến đổi tổng thành tích**

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

## B. ĐỀ BÀI

### §1. GÓC VÀ CUNG LƯỢNG GIÁC

### §2. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC (CUNG) LƯỢNG GIÁC

**6.1.** Trong các khẳng định sau đây, khẳng định nào đúng, khẳng định nào sai ?

a) Góc lượng giác $(Ou, Ov)$ có số đo dương thì mọi góc lượng giác cùng tia đầu, tia cuối với nó có số đo dương.

b) Góc lượng giác $(Ou, Ov)$ có số đo dương thì mọi góc lượng giác $(Ov, Ou)$ có số đo âm.

c) Hai góc lượng giác $(Ou, Ov)$ và $(Ou', Ov')$ có số đo khác nhau thì các góc hình học $uOv$, $u'Ov'$ không bằng nhau.

d) sđ$(Ou, Ov) = \frac{11\pi}{6}$, sđ $(Ou', Ov') = -\frac{13\pi}{6}$ thì $\widehat{uOv} = \widehat{u'Ov'}$.

e) Hai góc lượng giác $(Ou, Ov)$ và $(Ou', Ov')$ có số đo sai khác một bội nguyên của $2\pi$ thì các góc hình học $uOv$, $u'Ov'$ bằng nhau.

f) Hai góc hình học $uOv$, $u'Ov'$ bằng nhau thì số đo của các góc lượng giác $(Ou, Ov)$ và $(Ou', Ov')$ sai khác nhau một bội nguyên của $2\pi$.

**6.2.** Đổi số đo rađian của cung tròn sang số đo độ :

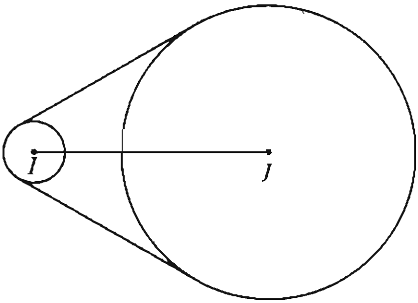
a) $\frac{3\pi}{4}$ ; b) $\frac{2\pi}{3}$ ; c) $\frac{11\pi}{6}$ ;

d) $\frac{3\pi}{7}$ ; e) 2,3 ; f) 4,2

**6.3.** Đổi số đo độ của cung tròn sang số đo rađian :

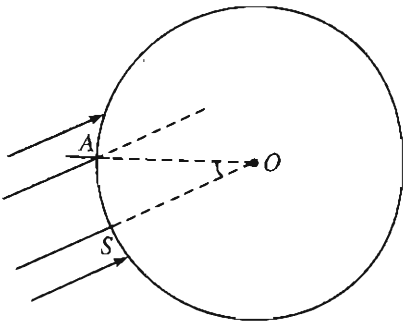
a) $45^\circ$ ; b) $150^\circ$ ; c) $72^\circ$ ; d) $75^\circ$

**6.4.** Một dây curoa quấn quanh hai trục tròn tâm $I$ bán kính 1dm và tâm $J$ bán kính 5dm mà khoảng cách $IJ$ là 8dm (h.6.1). Hãy tính độ dài của dây cu-roa.



*Hình 6.1*

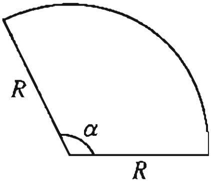
**6.5.** Ơ-ra-tơ-xten (Eratosthene), ở thế kỉ thứ II trước Công nguyên (Nguyên giám đốc thư viện nổi tiếng ở A-lếch-xăng-đri (Alexandrie)) đã tìm cách tính bán kính của Trái Đất bằng cách đo khoảng cách giữa hai thành phố A-lếch-xăng-đri và Xy-en (Syene) là 8004km (theo đơn vị ngày nay ; thuở đó các đoàn lạc đà đi từ thành phố này đến thành phố kia mất 50 ngày đường). Biết rằng, khi ở Xy-en tia sáng mặt trời chiếu thẳng đứng (nhìn thẳng xuống giếng sâu), thì ở A-lếch-xăng-đri, tia sáng mặt trời làm một góc $(7,1)^{\circ}$ với phương thẳng đứng. Hỏi làm sao Ơ-ra-tơ-xten suy ra được bán kính của Trái Đất (xấp xỉ 6 400 km) (h. 6.2) ?



*Hình 6.2*

**6.6.** Bánh xe máy có đường kính (kể cả lốp xe) 55 cm. Nếu xe chạy với vận tốc 40 km/h thì trong một giây bánh xe quay được bao nhiêu vòng ?

**6.7.** Xét hình quạt tròn bán kính $R$, góc ở tâm $\alpha$ ($R > 0, 0 < \alpha < 2\pi$). (h. 6.3).



*Hình 6.3*

a) Biết diện tích hình tròn bán kính $R$ là $\pi R^2$ và diện tích hình quạt tròn tỉ lệ thuận với số đo góc ở tâm. Hãy tính diện tích hình quạt tròn nói trên. Hỏi $\alpha$ bằng bao nhiêu thì diện tích đó bằng $R^2$ ?

b) Gọi chu vi hình quạt tròn là tổng độ dài hai bán kính và độ dài cung tròn của hình quạt đó. Trong các hình quạt có chu vi cho trước, tìm hình quạt có diện tích lớn nhất.

c) Trong các hình quạt có diện tích cho trước, tìm hình quạt có chu vi nhỏ nhất.

**6.8.** Huyện lị Quảng Bạ tỉnh Hà Giang và huyện lị Cái Nước tỉnh Cà Mau cùng nằm ở $105^{\circ}$ kinh đông, nhưng Quảng Bạ ở $23^{\circ}$ vĩ bắc, Cái Nước ở vĩ độ $9^{\circ}$ bắc. Hãy tính độ dài cung kinh tuyến nối hai huyện lị đó ("Khoảng cách theo đường chim bay"), coi Trái Đất có bán kính 6378km.

**6.9.** Tìm số đo độ của các cung lượng giác có số đo rađian sau :

a) $\dfrac{7\pi}{3}$ ; b) $\dfrac{-17\pi}{5}$ ; c) $\dfrac{13\pi}{6}$ ; d) $-1,72$.

**6.10.** Dùng máy tính bỏ túi, đổi số đo độ ra số đo rađian chính xác đến số thập phân thứ ba :

a) $20^\circ$ ; b) $-144^\circ$ ; c) $2003^\circ$ ; d) $\pi^\circ$

**6.11.** Cho góc lượng giác $(Ou, Ov)$ có số đo $\frac{\pi}{5}$ Hỏi trong các số $\frac{6\pi}{5}$ ; $\frac{9\pi}{5}$ ; $-\frac{11\pi}{5}$ ; $\frac{31\pi}{5}$ ; $-\frac{14\pi}{5}$ , những số nào là số đo của một góc lượng giác có cùng tia đầu, tia cuối với góc đã cho ?

**6.12.** Hãy tìm số đo $\alpha$ của góc lượng giác $(Ou, Ov)$ với $0 \leq \alpha < 2\pi$, biết một góc lượng giác cùng tia đầu, tia cuối với góc đó có số đo là :

$$\frac{29\pi}{4} ; -\frac{128\pi}{3} ; -\frac{2003\pi}{6} ; 18,5.$$

**6.13.** Hãy tìm số đo $a^\circ$ của góc lượng giác $(Ou, Ov)$, $0 \leq a < 360$, biết một góc lượng giác cùng tia đầu, tia cuối với góc đó có số đo là :

$$395^\circ ; -1052^\circ ; -972^\circ ; (20\pi)^\circ.$$

**6.14.** a) Trong các góc lượng giác có tia đầu $Ou$, tia cuối $Ov$ cho trước, chứng minh rằng, có một góc lượng giác duy nhất $(Ou, Ov)$ có số đo $\alpha$, $-\pi < \alpha \leq \pi$ và chứng minh rằng $|\alpha|$ là số đo rađian của góc hình học $uOv$.

b) Tìm số đo của góc hình học $uOv$, biết góc lượng giác $(Ou, Ov)$ có số đo là :

- $\frac{9\pi}{7}$ ; $-\frac{5\pi}{8}$ ; $\frac{106\pi}{9}$ ; $-2003$.
- $220^\circ$ ; $-235^\circ$ ; $1945^\circ$ ; $-2003^\circ$

**6.15.** a) Chứng minh rằng nếu sđ$(Ou, Ov) = \alpha$, sđ$(Ou', Ov') = \beta$ thì các góc hình học $uOv$, $u'Ov'$ bằng nhau khi và chỉ khi hoặc $\beta - \alpha = k2\pi$ hoặc $\beta + \alpha = k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

b) Hỏi trong các cặp góc lượng giác $(Ou, Ov)$ ; $(Ou', Ov')$ có số đo như sau, cặp nào xác định cặp góc hình học $uOv$ ; $u'Ov'$ bằng nhau ?

$\frac{13\pi}{6}$ và $\frac{11\pi}{6}$ ; $\frac{13\pi}{6}$ và $-\frac{11\pi}{6}$ ; $\frac{17\pi}{4}$ và $-\frac{15\pi}{4}$ ; $\frac{731\pi}{30}$ và $-\frac{11\pi}{30}$ ; $\frac{2003\pi}{8}$ và $-\frac{1211\pi}{8}$

**6.16.** Trên một đường tròn định hướng cho ba điểm $A$, $M$, $N$ sao cho sđ $\overset{\curvearrowright}{AM} = \frac{\pi}{6}$ ; sđ $\overset{\curvearrowright}{AN} = \frac{k\pi}{798}$, $(k \in \mathbb{Z})$. Tìm $k \in \mathbb{N}$ để $M$ trùng với $N$ và tìm $k \in \mathbb{N}$ để $M$ và $N$ đối xứng qua tâm đường tròn.

**6.17.** Trên một đường tròn định hướng cho ba điểm $A$, $M$, $N$ sao cho sđ $\overset{\curvearrowright}{AM} = \frac{\pi}{3}$ ; sđ $\overset{\curvearrowright}{AN} = \frac{3\pi}{4}$ Gọi $P$ là điểm thuộc đường tròn đó để tam giác $MNP$ là tam giác cân. Hãy tìm số đo $\overset{\curvearrowright}{AP}$

**6.18.** Trên đường tròn lượng giác hãy tìm các điểm xác định bởi các số :

$$\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, (k \in \mathbb{Z}) ; \qquad k\frac{\pi}{3}. (k \in \mathbb{Z}) ; \qquad k\frac{2\pi}{5}, (k \in \mathbb{Z}).$$

**6.19.** Tìm giá trị lượng giác sin, côsin, tang của các góc lượng giác có số đo sau (không dùng máy tính) :

- $120^\circ$ ; $-30^\circ$ ; $-225^\circ$ ; $750^\circ$ ; $510^\circ$
- $\frac{5\pi}{4}$; $\frac{7\pi}{2}$ ; $\frac{5\pi}{3}$ ; $-\frac{10\pi}{3}$ ; $\frac{17\pi}{3}$

**6.20.** Cho số $\alpha$ , $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Hỏi các điểm trên đường tròn lượng giác xác định bởi các số sau nằm trong góc phần tư nào của hệ toạ độ vuông góc gắn với đường tròn đó :

$$\alpha - \pi \,;\, \alpha + \frac{\pi}{2} \,;\, \frac{\pi}{2} - \alpha \,;\, \frac{3\pi}{2} - \alpha \,?$$

**6.21.** Xác định dấu của $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$, biết :

$\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ ; $\qquad \frac{3\pi}{2} < \alpha < \frac{7\pi}{4}$; $\qquad \frac{7\pi}{4} < \alpha < 2\pi$;

$2\pi < \alpha < 2{,}5\pi$ ; $\qquad 3\pi < \alpha < \frac{10\pi}{3}$ ; $\qquad \frac{5\pi}{2} < \alpha < \frac{11\pi}{4}$

**6.22.** Trong mặt phẳng toạ độ $Oxy$, xét các điểm $M$ có toạ độ : $(3 ; -4)$, $(4 ; -3)$, $(-12 ; -9)$, $(-1 ; 1)$.

Hãy tính các giá trị lượng giác của các góc lượng giác $(Ox ; OM)$.

**6.23.** Tính $A = \cos\frac{\pi}{6}\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{3}$ ;

$$B = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right).$$

**6.24.** Hỏi có bao nhiêu giá trị khác nhau của $\sin\frac{k2\pi}{5}$, khi số nguyên $k$ thay đổi ?

Cũng câu hỏi đó cho $\cos\frac{k2\pi}{5}$ ; $\tan\frac{k2\pi}{5}$ ; $\tan\frac{k\pi}{3}$

**6.25.** Dùng máy tính bỏ túi, tìm các giá trị lượng giác sau (chính xác đến hàng phần nghìn) :

$$\sin 10^\circ \ ; \ \cos\frac{\pi}{9} \ ; \ \tan\frac{10\pi}{9} \ ; \ \cot(1{,}35).$$

**6.26.** Tính các giá trị lượng giác còn lại của $\alpha$, biết :

a) $\cos\alpha = \frac{5}{13}$ và $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ ;

b) $\sin\alpha = 0{,}8$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ ;

c) $\tan\alpha = \frac{15}{8}$ và $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ ;

d) $\cot\alpha = -3$ và $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

**6.27.** Cho $\tan\alpha = 3$. Tính $\frac{2\sin\alpha + 3\cos\alpha}{4\sin\alpha - 5\cos\alpha}$ ; $\frac{3\sin\alpha - 2\cos\alpha}{5\sin^3\alpha + 4\cos^3\alpha}$.

**6.28.** Chứng minh rằng :

a) $\frac{\tan^2\alpha - \sin^2\alpha}{\cot^2\alpha - \cos^2\alpha} = \tan^6\alpha$ ;

b) $\frac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\cos^3\alpha} = 1 + \tan\alpha + \tan^2\alpha + \tan^3\alpha$ ;

c) $\sqrt{\sin^2\alpha(1 + \cot\alpha) + \cos^2\alpha(1 + \tan\alpha)} = |\sin\alpha + \cos\alpha|$ ;

d) $\sin^2\alpha\tan^2\alpha + 4\sin^2\alpha - \tan^2\alpha + 3\cos^2\alpha = 3$.

(Giả sử các biểu thức đã cho đều có nghĩa).

**6.29.** Cho $\tan\alpha + \cot\alpha = m$, hãy tính theo $m$

a) $\tan^2\alpha + \cot^2\alpha$ ; b) $|\tan\alpha - \cot\alpha|$ ; c) $\tan^3\alpha + \cot^3\alpha$.

**6.30.** Cho $\sin\alpha + \cos\alpha = m$, hãy tính theo $m$

a) $\sin\alpha\cos\alpha$ ; b) $|\sin\alpha - \cos\alpha|$ ;

c) $\sin^3\alpha + \cos^3\alpha$ ; d) $\sin^6\alpha + \cos^6\alpha$.

**6.31.** Chứng minh rằng :

a) $\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} + \sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}} = \dfrac{2}{|\sin\alpha|}$ ;

b) $\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}} - \sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \dfrac{2\cos\alpha}{|\sin\alpha|}$.

(Giả sử các biểu thức đã cho đều có nghĩa).

## §3. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA CÁC GÓC (CUNG) CÓ LIÊN QUAN ĐẶC BIỆT

**6.32.** Đơn giản biểu thức :

a) $\cos\left(\alpha - \dfrac{\pi}{2}\right) + \sin(\alpha - \pi)$ ;

b) $\cos(\pi - \alpha) + \sin\left(\alpha + \dfrac{\pi}{2}\right)$ ;

c) $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) + \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) - \cos\left(\dfrac{\pi}{2} + \alpha\right) - \sin\left(\dfrac{\pi}{2} + \alpha\right)$ ;

d) $\cos\left(\dfrac{3\pi}{2} - \alpha\right) - \sin\left(\dfrac{3\pi}{2} - \alpha\right) + \cos\left(\alpha - \dfrac{7\pi}{2}\right) - \sin\left(\alpha - \dfrac{7\pi}{2}\right)$ ;

e) $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) + \cos(\pi - \alpha) + \cos\left(\dfrac{3\pi}{2} - \alpha\right) + \cos(2\pi - \alpha)$ ;

f) $\sin\left(\frac{5\pi}{2}-\alpha\right)-\cos\left(\frac{13\pi}{2}-\alpha\right)-3\sin(\alpha-5\pi)-2\sin\alpha-\cos\alpha$ ;

g) $\cos(5\pi+\alpha)-2\sin\left(\frac{11\pi}{2}-\alpha\right)-\sin\left(\frac{11\pi}{2}+\alpha\right)$.

**6.33.** Chứng minh rằng với mọi $\alpha$ ta có :

a) $\sin\left(\frac{5\pi}{4}+\alpha\right)=-\sin\left(\frac{3\pi}{4}-\alpha\right)$ ;

b) $\cos\left(\alpha-\frac{2\pi}{3}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)$ ;

c) $\cos\left(\alpha-\frac{2\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{4\pi}{3}+\alpha\right)$.

**6.34.** Không sử dụng máy tính và bảng số, hãy tính :

a) $\sin 315^\circ$ ; $\cos 930^\circ$ ; $\tan 405^\circ$ ; $\cos 750^\circ$ ; $\sin 1140^\circ$ ;

b) $\cos 630^\circ-\sin 1470^\circ-\cot 1125^\circ$ ;

c) $\cos 4455^\circ-\cos 945^\circ+\tan 1035^\circ-\cot(-1500^\circ)$.

**6.35.** Tính

a) $\cos\frac{\pi}{9}+\cos\frac{2\pi}{9}+\ldots+\cos\frac{8\pi}{9}$ ;

b) $\sin^2\frac{\pi}{3}+\sin^2\frac{\pi}{6}+\sin^2\frac{\pi}{9}+\sin^2\frac{2\pi}{9}+\sin^2\frac{5\pi}{18}+\sin^2\frac{7\pi}{18}$ ;

c) $\cos^2\frac{\pi}{3}+\cos^2\frac{5\pi}{6}+\cos^2\frac{\pi}{9}+\cos^2\frac{11\pi}{18}+\cos^2\frac{13\pi}{18}+\cos^2\frac{2\pi}{9}$ ;

d) $\cos\frac{\pi}{5}+\cos\frac{2\pi}{5}+\ldots+\cos\frac{9\pi}{5}$ ;

e) $\sin\frac{\pi}{5}+\sin\frac{2\pi}{5}+\ldots+\sin\frac{9\pi}{5}$

**6.36.** Giả sử trên đường tròn lượng giác, điểm xác định bởi số $\alpha$ nằm trong góc phần tư I, II, III, hay IV của hệ toạ độ vuông góc gắn với đường tròn đó (không nằm trên các trục toạ độ).

Khi đó điểm xác định bởi các số : $\alpha+\frac{\pi}{2}$; $\alpha+\pi$ ; $\alpha-\frac{\pi}{2}$; $-\alpha$ ; $-\alpha+\frac{\pi}{2}$; $-\alpha+\pi$ nằm trong góc phần tư nào ? Điền vào bảng sau :

| **Điểm xác định bởi** | **Nằm trong góc phần tư** | | | |
|---|---|---|---|---|
| $\alpha$ | I | II | III | IV |
| $\alpha+\dfrac{\pi}{2}$ | II | | | |
| $\alpha+\pi$ | | | | |
| $\alpha-\dfrac{\pi}{2}$ | | | | |
| $-\alpha$ | | | | |
| $-\alpha+\dfrac{\pi}{2}$ | | | | |
| $-\alpha+\pi$ | | | | |

**6.37.** a) Trên đường tròn định hướng tâm $O$ cho ba điểm $M$, $N$, $P$ Chứng minh rằng $M$, $N$ là hai điểm đối xứng nhau qua đường thẳng $OP$ khi và chỉ khi sđ$(OP, OM)$ + sđ$(OP, ON) = k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

b) Trên đường tròn lượng giác, xét các điểm $M$, $N$, $P$ xác định theo thứ tự bởi các số $\alpha$, $\beta$, $\gamma$. Chứng minh rằng $M$, $N$ là hai điểm đối xứng nhau qua đường thẳng $OP$ khi và chỉ khi $\alpha+\beta=2\gamma+k2\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$.

c) Tìm điều kiện để hai điểm $M$, $N$ trên đường tròn lượng giác xác định theo thứ tự bởi các số $\alpha$, $\beta$ đối xứng nhau qua đường phân giác của góc phần tư II (và IV) của hệ toạ độ vuông góc gắn với đường tròn lượng giác.

d) Hỏi các điểm trên đường tròn lượng giác xác định theo thứ tự bởi các số $\dfrac{\pi}{4}$ ; $\dfrac{\pi}{2}$ ; $\dfrac{5\pi}{6}$ ; $\dfrac{13\pi}{12}$, có phải là các đỉnh của một hình thang cân hay không ?

**6.38.** Chứng minh rằng, với mọi $\alpha$, với mọi số nguyên $k$, ta có :

$$\sin\left(\alpha+k\frac{\pi}{2}\right)=\begin{cases}(-1)^l\sin\alpha & \text{nếu } k=2l\\(-1)^l\cos\alpha & \text{nếu } k=2l+1\ ;\end{cases}$$

$$\cos\left(\alpha+k\frac{\pi}{2}\right)=\begin{cases}(-1)^l\cos\alpha & \text{nếu } k=2l\\(-1)^{l+1}\sin\alpha & \text{nếu } k=2l+1\ ;\end{cases}$$

$$\tan\left(\alpha+k\frac{\pi}{2}\right)=\begin{cases}\tan\alpha & \text{nếu } k=2l\\-\cot\alpha & \text{nếu } k=2l+1\end{cases}\quad\text{(khi các biểu thức này có nghĩa).}$$

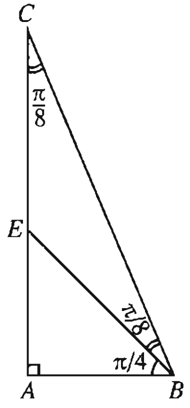
**6.39.** Tính $\cos\frac{\pi}{8}$ và $\sin\frac{\pi}{8}$ bằng "phương pháp hình học" như sau :

Xét tam giác vuông ABC với

$\widehat{A} = \frac{\pi}{2}; \widehat{C} = \frac{\pi}{8}$ thì $\cos\frac{\pi}{8} = \frac{AC}{BC}$ ; $\sin\frac{\pi}{8} = \frac{AB}{BC}$.

Bằng cách xét điểm $E$ trên cạnh $AC$ sao cho $AE = AB$ (h. 6.4), hãy chứng minh rằng :

$$\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}, \ \sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$



*Hình 6.4*

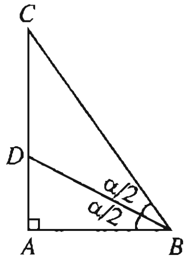
**6.40.** Chứng minh công thức $\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$

(với $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$) bằng "phương pháp hình học" như sau :

Xét tam giác vuông $ABC$ với $\widehat{A} = \frac{\pi}{2}, \widehat{B} = \alpha$

Bằng cách vẽ đường phân giác $BD$ của góc $B$ (h. 6.5), từ tính chất $\frac{AD}{AB} = \frac{DC}{BC}$, hãy suy ra rằng :

$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$. Hãy tính $\tan\frac{\pi}{12}$



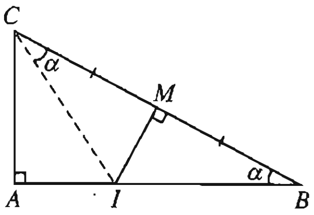
*Hình 6.5*

**6.41.** Chứng minh công thức $\cos2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$ (với $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$) bằng "phương pháp hình học" như sau :

Xét tam giác vuông $ABC$ với $\widehat{A} = \frac{\pi}{2}$. $\widehat{B} = \alpha$.

Kẻ đường trung trực của đoạn $BC$ cắt $AB$ tại $I$. Dễ thấy : $\cos2\alpha = \frac{AI}{IC}$ ; $\cos\alpha = \frac{AB}{BC}$ (h. 6.6) ; từ đó hãy suy ra

$$\cos2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1.$$



*Hình 6.6*

## §4. MỘT SỐ CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

**6.42.** a) Viết $\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}$ ; $\frac{\pi}{12}=\frac{1}{2}.\frac{\pi}{6}$ rồi dùng công thức cộng, công thức nhân đôi để tìm các giá trị lượng giác sin, côsin, tang của góc $\frac{\pi}{12}$ bằng hai cách khác nhau và đối chiếu các kết quả tìm thấy.

b) Tính sin, côsin, tang của các góc $75^\circ$, $105^\circ$, $165^\circ$ (không dùng máy tính bỏ túi).

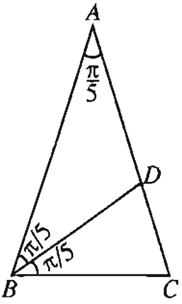
**6.43.** a) Tính $x=\cos\frac{2\pi}{5}$ bằng "phương pháp hình học" như sau :

Xét tam giác cân $ABC$ với $\widehat{B}=\widehat{C}=\frac{2\pi}{5}$. kẻ đường phân giác $BD$ của tam giác đó. Từ tính chất $\frac{BC}{BA}=\frac{DC}{DA}$ (h. 6.7) hãy suy ra $4x^2+2x-1=0$.

b) Từ đó tính $\cos\frac{\pi}{5}$ ,$\sin\frac{\pi}{5}$, $\tan\frac{\pi}{5}$

c) Tính sin, côsin, tang của $18^\circ$

d) Viết $6=36-30$, tính sin, côsin của $6^\circ$ Thử lại bằng máy tính bỏ túi.



*Hình 6.7*

**6.44.** Cho $\cos\alpha=\frac{3}{4}$; $\sin\alpha>0$ ; $\sin\beta=\frac{3}{5}$, $\cos\beta<0$.

Hãy tính $\cos2\alpha$, $\sin2\alpha$, $\cos2\beta$, $\sin2\beta$, $\cos(\alpha+\beta)$, $\sin(\alpha-\beta)$.

**6.45.** a) Cho $\cos\alpha=0{,}6$ và $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$. Hãy tính $\cos\frac{\alpha}{2}$ ; $\sin\frac{\alpha}{2}$ ; $\tan\frac{\alpha}{2}$.

b) Cho $\sin\beta=\frac{3}{5}$ và $\frac{\pi}{2}<\beta<\pi$ Hãy tính $\cos\frac{\beta}{2}$ ; $\sin\frac{\beta}{2}$ ; $\tan\frac{\beta}{2}$

**6.46.** Cho $\cos\alpha=m$.

a) Hãy tính $\cos2\alpha$ ; $\sin^2 2\alpha$ ; $\tan^2 2\alpha$ theo $m$ (giả sử $\tan2\alpha$ xác định).

b) Hỏi $\sin2\alpha$ ; $\tan2\alpha$ có xác định duy nhất bởi $m$ hay không ?

**6.47.** Cho $\sin\alpha=m$.

Cũng câu hỏi như ở bài 6.46.

**6.48.** Cho $\cos\alpha = m$.

Hãy tính $\cos^2\dfrac{\alpha}{2}$ ; $\sin^2\dfrac{\alpha}{2}$ ; $\tan^2\dfrac{\alpha}{2}$ theo $m$ (giả sử $\tan\dfrac{\alpha}{2}$ xác định).

**6.49.** a) Tính $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ theo $\tan\dfrac{\alpha}{2} = t$.

b) Hãy tính $\dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} + \dfrac{1}{\tan\alpha} + 4\sin\alpha$ theo $\tan\dfrac{\alpha}{2} = t$.

**6.50.** Giả sử các biểu thức sau có nghĩa, chứng minh rằng :

a) $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha + \sin 2\alpha}{1 + \cos\alpha + \cos 2\alpha}$;  b) $\tan^2\alpha = \dfrac{2\sin 2\alpha - \sin 4\alpha}{2\sin 2\alpha + \sin 4\alpha}$

**6.51.** a) Chứng minh rằng với mọi $\alpha$, $\beta$, ta có :

$$\sin^2(\alpha+\beta) = \sin^2\alpha + \sin^2\beta + 2\sin\alpha\sin\beta\cos(\alpha+\beta).$$

b) Biết $\cos\alpha + \cos\beta = m$ ; $\sin\alpha + \sin\beta = n$, hãy tính $\cos(\alpha-\beta)$ theo $m$ và $n$.

c) Biết $\cos^2\alpha + \cos^2\beta = p$. Hãy tính $\cos(\alpha-\beta)\cos(\alpha+\beta)$ theo $p$.

**6.52.** a) Chứng minh rằng nếu $\cos(\alpha+\beta) = 0$ thì $\sin(\alpha+2\beta) = \sin\alpha$.

b) Chứng minh rằng nếu $\sin(2\alpha+\beta) = 3\sin\beta$ và $\cos\alpha \neq 0$, $\cos(\alpha+\beta) \neq 0$ thì $\tan(\alpha+\beta) = 2\tan\alpha$.

**6.53.** Chứng minh

a) $4\cos 15^\circ\cos 21^\circ\cos 24^\circ - \cos 12^\circ - \cos 18^\circ = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$ ;

b) $\tan 30^\circ + \tan 40^\circ + \tan 50^\circ + \tan 60^\circ = \dfrac{8\sqrt{3}}{3}\cos 20^\circ$ ;

c) $\dfrac{1}{\sin 18^\circ} - \dfrac{1}{\sin 54^\circ} = 2$ ;

d) $\tan 9^\circ - \tan 27^\circ - \tan 63^\circ + \tan 81^\circ = 4$.

**6.54.** Chứng minh

a) $\dfrac{\sin x + \sin y}{2} \leq \sin\dfrac{x+y}{2}$ với mọi $x$, $y$ đều không âm và $x + y \leq 2\pi$.

b) $\dfrac{\cos x + \cos y}{2} \leq \cos\dfrac{x+y}{2}$ với mọi $x$, $y$ thoả mãn $-\pi \leq x + y \leq \pi$.

**6.55.** Chứng minh

$\dfrac{\sin\alpha + \sin\beta\cos(\alpha+\beta)}{\cos\alpha - \sin\beta\sin(\alpha+\beta)} = \tan(\alpha+\beta)$ (khi các biểu thức có nghĩa).

**6.56.** Chứng minh rằng nếu tam giác $ABC$ thoả mãn điều kiện :

a) $\sin A = \dfrac{\cos B + \cos C}{\sin B + \sin C}$ thì tam giác $ABC$ là tam giác vuông ;

b) $\dfrac{\sin A}{\sin B} = \dfrac{\cos B + \cos C}{\cos C + \cos A}$ thì tam giác $ABC$ là một tam giác vuông hoặc một tam giác cân.

**6.57.** Xét các biểu thức

$$S = \sin\alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha + \ldots + \sin n\alpha,$$

$$T = 1 + \cos\alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha + \ldots + \cos n\alpha$$

($n$ là một số nguyên dương).

Chứng minh :

a) $S\sin\dfrac{\alpha}{2} = \sin\dfrac{n\alpha}{2}\sin\dfrac{(n+1)\alpha}{2}$ ; b) $T\sin\dfrac{\alpha}{2} = \cos\dfrac{n\alpha}{2}\sin\dfrac{(n+1)\alpha}{2}$.

**6.58.** Chứng minh :

a) $\sin\dfrac{2\pi}{7} + \sin\dfrac{4\pi}{7} + \sin\dfrac{6\pi}{7} = \dfrac{1}{2}\cot\dfrac{\pi}{14}$ ;

b) $\cos\dfrac{\pi}{11} + \cos\dfrac{3\pi}{11} + \cos\dfrac{5\pi}{11} + \cos\dfrac{7\pi}{11} + \cos\dfrac{9\pi}{11} = \dfrac{1}{2}$ ;

c) $\cos\dfrac{2\pi}{11} + \cos\dfrac{4\pi}{11} + \cos\dfrac{6\pi}{11} + \cos\dfrac{8\pi}{11} + \cos\dfrac{10\pi}{11} = -\dfrac{1}{2}$ ;

d) $\sin\dfrac{\pi}{11} + \sin\dfrac{2\pi}{11} + \ldots + \sin\dfrac{10\pi}{11} = \cot\dfrac{\pi}{22}$

## BÀI TẬP ÔN TẬP CHƯƠNG VI

**6.59.** Cho $\sin\alpha - \cos\alpha = m$. Hãy tính theo $m$

a) $\sin\alpha\cos\alpha$ ; b) $|\sin\alpha + \cos\alpha|$ ;

c) $\sin^3\alpha - \cos^3\alpha$ ; d) $\sin^6\alpha + \cos^6\alpha$.

**6.60.** Tính

a) $\sin^2 15^\circ + \sin^2 35^\circ + \sin^2 55^\circ + \sin^2 75^\circ$ ;

b) $\sin^2\dfrac{\pi}{8} + \sin^2\dfrac{3\pi}{8} + \sin^2\dfrac{5\pi}{8} + \sin^2\dfrac{7\pi}{8}$ ;

c) $\cos^2\dfrac{\pi}{12} + \cos^2\dfrac{3\pi}{12} + \cos^2\dfrac{5\pi}{12} + \cos^2\dfrac{7\pi}{12} + \cos^2\dfrac{9\pi}{12} + \cos^2\dfrac{11\pi}{12}$

**6.61.** Giả sử phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$, $(ac \neq 0)$ có hai nghiệm là $\tan\alpha$ và $\tan\beta$. Chứng minh rằng

$$a.\sin^2(\alpha + \beta) + b.\sin(\alpha + \beta)\cos(\alpha + \beta) + c.\cos^2(\alpha + \beta) = c.$$

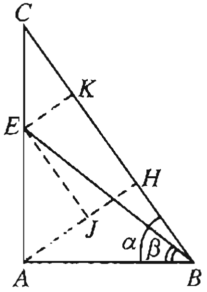
**6.62.** Chứng minh rằng với mọi $\alpha$ mà $\sin 2\alpha \neq 0$, ta có

$$\sin(\cot\alpha) + \sin(\tan\alpha) = 2\sin\left(\frac{1}{\sin 2\alpha}\right)\cos(\cot 2\alpha).$$

**6.63.** Chứng minh công thức

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

(với $0 < \beta < \alpha < \frac{\pi}{2}$) bằng "phương pháp hình học" như sau : Xét tam giác vuông $ABC$ với $\widehat{A} = \frac{\pi}{2}$; $\widehat{ABC} = \alpha$ ; $E$ là một điểm trên $AC$ sao cho $\widehat{ABE} = \beta$ Kẻ $AH$, $EK$ vuông góc với $BC$ (h.6.8) thì dễ thấy $\cos(\alpha - \beta) = \frac{BK}{BE} = \frac{BH}{BE} + \frac{HK}{BE}$. Từ đó suy ra công thức trên.



*Hình 6.8*

**6.64.** Chứng minh rằng $\cos\frac{\pi}{32} = \frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}$

**6.65.** a) Chứng minh $\cos\frac{2\pi}{9}\cos\frac{4\pi}{9}\cos\frac{8\pi}{9} = -\frac{1}{8}$ bằng cách nhân cả hai vế với $\sin\frac{2\pi}{9}$

b) Chứng minh rằng $\cos\frac{2\pi}{9} + \cos\frac{8\pi}{9} = 2\cos\frac{5\pi}{9}\cos\frac{\pi}{3} = \cos\frac{5\pi}{9}$.

Từ đó suy ra $\cos\frac{2\pi}{9} + \cos\frac{4\pi}{9} + \cos\frac{8\pi}{9} = 0$.

c) Từ b) suy ra rằng $\cos^2\frac{2\pi}{9} + \cos^2\frac{4\pi}{9} + \cos^2\frac{8\pi}{9} = \frac{3}{2}$.

d) Từ b) và c) suy ra rằng :

$$\cos\frac{2\pi}{9}\cos\frac{4\pi}{9} + \cos\frac{4\pi}{9}\cos\frac{8\pi}{9} + \cos\frac{8\pi}{9}\cos\frac{2\pi}{9} = -\frac{3}{4}.$$

e) Từ a), b) và d) suy ra rằng :

$$\left(X-\cos\frac{2\pi}{9}\right)\left(X-\cos\frac{4\pi}{9}\right)\left(X-\cos\frac{8\pi}{9}\right)=X^3-\frac{3}{4}X+\frac{1}{8}.$$

từ đó ta có $\left(1-\cos\frac{2\pi}{9}\right)\left(1-\cos\frac{4\pi}{9}\right)\left(1-\cos\frac{8\pi}{9}\right)=\frac{3}{8}$.

Suy ra

- $\sin\frac{\pi}{9}\sin\frac{2\pi}{9}\sin\frac{4\pi}{9}=\frac{\sqrt{3}}{8}$.
- $\sin\frac{5\pi}{9}\sin\frac{7\pi}{9}\sin\frac{8\pi}{9}=\frac{\sqrt{3}}{8}$.

f) Từ e) suy ra rằng

$$\sin\frac{\pi}{9}\sin\frac{2\pi}{9}\sin\frac{3\pi}{9}\sin\frac{4\pi}{9}\sin\frac{5\pi}{9}\sin\frac{6\pi}{9}\sin\frac{7\pi}{9}\sin\frac{8\pi}{9}=\frac{9}{256}$$

(*Chú ý*. Người ta chứng minh được rằng không thể dùng thước và compa để dựng đa giác đều chín cạnh nội tiếp trong một đường tròn cho trước).

**6.66.** Chứng minh rằng

$$\cos^2(\gamma-\alpha)+\sin^2(\gamma-\beta)-2\cos(\gamma-\alpha)\sin(\gamma-\beta)\sin(\alpha-\beta)=$$

$$=\cos^2(\alpha-\beta).$$

**6.67.** Tìm giá trị bé nhất của biểu thức $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha$.

**6.68.** Tìm giá trị bé nhất của biểu thức $\sin^6\alpha+\cos^6\alpha$.

## GIỚI THIỆU MỘT SỐ CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN

*Đối với các bài từ 6.69 đến 6.78, hãy tìm phương án trả lời đúng trong các phương án đã cho.*

**6.69.** $\sin\frac{3\pi}{10}$ bằng :

(A) $\cos\frac{4\pi}{5}$ ; (B) $\cos\frac{\pi}{5}$ ; (C) $1-\cos\frac{\pi}{5}$ ; (D) $-\cos\frac{\pi}{5}$.

**6.70.** $\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{30}+\sin\frac{\pi}{30}\cos\frac{4\pi}{5}$ bằng

(A) 1 ; (B) $-\frac{1}{2}$ ; (C) $\frac{1}{2}$ ; (D) 0.

**6.71.** $\dfrac{\sin\frac{\pi}{9}+\sin\frac{5\pi}{9}}{\cos\frac{\pi}{9}+\cos\frac{5\pi}{9}}$ bằng

(A) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ; (B) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ ; (C) $\sqrt{3}$ ; (D) $-\sqrt{3}$.

**6.72.** $\dfrac{\sin\frac{5\pi}{9}-\sin\frac{\pi}{9}}{\cos\frac{5\pi}{9}-\cos\frac{\pi}{9}}$ bằng

(A) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ; (B) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ ; (C) $\sqrt{3}$ ; (D) $-\sqrt{3}$.

**6.73.** Giá trị lớn nhất của biểu thức $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha$ là

(A) 1 ; ( B) $\frac{1}{4}$ ; (C) $\frac{1}{2}$ ; (D) Không phải ba giá trị trên.

**6.74.** Giá trị lớn nhất của biểu thức $\sin^4\alpha+\cos^7\alpha$ là :

(A) 2 ; (B) 1 ; (C) $\frac{1}{2}$ ; (D) Không phải ba giá trị trên.

**6.75.** Giá trị bé nhất của biểu thức $\sin^4\alpha+\cos^7\alpha$ là :

(A) –2 ; (B) –1 ; (C) $-\frac{1}{2}$ ; (D) 1.

**6.76.** Giá trị lớn nhất của biểu thức $\sin^{12}\alpha+\cos^{12}\alpha$ là :

(A) 2 ; (B) $\frac{1}{4}$ ; (C) 1 ; (D) $\frac{1}{2}$

**6.77.** Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $\frac{4}{\cos^6\alpha}-3\tan^6\alpha$ là :

(A) 4 ; (B) –3 ; (C) 1 ; (D) 2.

**6.78.** Với mọi $\alpha$, biểu thức

$$\cos\alpha + \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{5}\right) + \cos\left(\alpha + \frac{2\pi}{5}\right) + ... + \cos\left(\alpha + \frac{9\pi}{5}\right)$$

nhận giá trị bằng

(A) 10 ; (B) $-10$ ; (C) 0 ; (D) Không phải ba giá trị trên.

## C. ĐÁP SỐ – HƯỚNG DẪN – LỜI GIẢI

**6.1.** a) Sai : $(Ou, Ov) = \alpha$ thì có vô số số nguyên $k$ để $\alpha + k2\pi < 0$.

b) Sai : $(Ou, Ov) = \alpha$ thì $(Ov, Ou) = -\alpha + k2\pi$, do đó có vô số số nguyên $k$ để $-\alpha + k2\pi > 0$.

c) Sai : Với $(Ou, Ov) = \frac{\pi}{2}$ và lấy $Ou' = Ov$, $Ov' = Ou$ thì $(Ou', Ov') = (Ov, Ou) = -\frac{\pi}{2}$ nhưng $\widehat{uOv} = \widehat{vOu} = \widehat{u'Ov'}$

d) Đúng : $\frac{11\pi}{6} = 2\pi - \frac{\pi}{6}$ ; $-\frac{13\pi}{6} = -2\pi - \frac{\pi}{6}$ ; $\widehat{uOv} = \frac{\pi}{6} = \widehat{u'Ov'}$

e) Đúng : Vì hai góc lượng giác đó có số đo dạng $\alpha + k2\pi$ và $\alpha + l2\pi$ $(k, l \in \mathbb{Z})$, $0 \le \alpha < 2\pi$.

f) Sai : vì $(Ou, Ov) = \frac{\pi}{2}$ ; $(Ov, Ou) = -\frac{\pi}{2}$ có $\widehat{uOv} = \widehat{u'Ov'}$ nhưng

$$\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$$

**6.2.** a) $135^\circ$ ; b) $120^\circ$ ; c) $330^\circ$ ; d) $\approx (77{,}1429)^\circ \approx 77^\circ8'34''$ ;

e) $2{,}3 \approx 131^\circ46'49''$ ; f) $4{,}2 \approx 240^\circ38'32''$

**6.3.** a) $\frac{\pi}{4}$ ; b) $\frac{5\pi}{6}$ ; c) $\frac{2\pi}{5}$ ; d) $\frac{5\pi}{12}$

**6.4.** Gọi $A$, $B$ là hai điểm tiếp xúc của dây curoa theo thứ tự với đường tròn tâm $I$ và tâm $J$ ($A$, $B$ nằm cùng phía đối với đường thẳng $IJ$). Ta có

$\cos\widehat{BJI} = \dfrac{R-r}{d} = \dfrac{5-1}{8} = \dfrac{1}{2}$ ($r = 1$ là bán kính của đường tròn tâm $I$, $R = 5$dm là bán kính của đường tròn tâm $J$, $d = IJ = 8$dm là khoảng cách giữa hai tâm). Vậy $\widehat{BJI} = \alpha = \dfrac{\pi}{3}$

Dễ thấy chiều dài dây curoa bằng :

$$2\left[R(\pi - \alpha) + r\alpha + d\sin\alpha\right] = 2\left(\frac{11\pi}{3} + 4\sqrt{3}\right) \approx 36{,}89 \text{ (dm)}.$$

**6.5.** Các tia sáng mặt trời chiếu song song xuống mặt đất : ở Xy-en (kí hiệu là $S$) chiếu thẳng góc với mặt đất, ở A-lếch-xăng-đri (kí hiệu là $A$) tạo với phương thẳng đứng một góc $(7{,}1)^{\circ}$ nên số đo cung tròn $AS$ là $(7{,}1)^{\circ}$ Gọi $R$ (km) là bán kính của Trái Đất, thì do độ dài cung tròn $AS$ bằng 800km, suy ra được $R = \dfrac{800}{\dfrac{\pi}{180} \times 7{,}1} = \dfrac{800.180}{\pi \times 7{,}1} \approx 6456\ (km)$.

**6.6.** Trong một giây, bánh xe quay được $\dfrac{4000000}{60.60.55.\pi} \approx 6{,}4$ (vòng).

**6.7.** a) Diện tích hình quạt tròn với bán kính $R$ và góc ở tâm $\alpha$ là

$$S = \frac{\pi R^2}{2\pi}\alpha = \frac{1}{2}R^2\alpha. \text{ Từ đó } S = R^2 \Leftrightarrow \alpha = 2.$$

b) Chu vi hình quạt tròn nói trên là $C = 2R + R\alpha$. Hai số dương $2R$ và $R\alpha$ có tổng không đổi nên tích $2R.R\alpha = 4S$ đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi $2R = R\alpha \Leftrightarrow \alpha = 2$.

c) Hai số dương $2R$ và $R\alpha$ có tích $2R.R\alpha = 4S$ không đổi, nên tổng $2R + R\alpha = C$ đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi $2R = R\alpha \Leftrightarrow \alpha = 2$.

**6.8.** Độ dài cung kinh tuyến đó là $\dfrac{6378.14.\pi}{180} \approx 1558$ (km).

**6.9.** a) $420^{\circ}$ ; b) $-612^{\circ}$ ; c) $390^{\circ}$ ; d) $-1{,}72 \approx -98^{\circ}32'55''$

**6.10.** a) $\approx 0{,}349$ ; b) $\approx -2{,}513$ ; c) $\approx 34{,}959$ ; d) $\approx 0{,}055$.

**6.11.** Các góc lượng giác $(Ou, Ov)$ có số đo là $\dfrac{\pi}{5} + k2\pi = (10k+1)\dfrac{\pi}{5}$. $k \in \mathbb{Z}$.

Vậy trong các số đo đã cho chỉ có số $\dfrac{31\pi}{5}$

**6.12.** Các số $\alpha$ cần tìm theo thứ tự là $\frac{5\pi}{4}$ ; $\frac{4\pi}{3}$ ; $\frac{\pi}{6}$ ; $\alpha \approx 1{,}889\pi \approx 5{,}934$.

**6.13.** Các số $a^0$ cần tìm theo thứ tự là : $35^0$ ; $28^0$ ; $108^0$ ; $(20\pi)^0$ ($\approx 62^0 49'55''$).

**6.14.** a) Nếu một góc lượng giác $(Ou, Ov)$ có số đo $\alpha$, $-\pi < \alpha \le \pi$, thì mọi góc lượng giác $(Ou, Ov)$ khác có số đo $\alpha + k2\pi$ ($k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$), nhưng dễ thấy $\alpha + k2\pi \notin (-\pi ; \pi]$, với k nguyên khác không, vậy góc lượng giác đó là duy nhất.

Khi hai tia $Ou$, $Ov$ đối nhau thì một góc lượng giác $(Ou, Ov)$ có số đo là $\pi$ và $\pi$ cũng là số đo rađian của góc bẹt $uOv$. Khi $Ou$, $Ov$ không đối nhau thì số đo góc hình học $uOv$ là $\beta$, $0 \le \beta < \pi$ và sđ $(Ou, Ov)$ là $\beta + k2\pi$ hoặc $-\beta + k2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) tức là :

$$\text{sđ}(Ou, Ov) = \alpha + k2\pi \; ; \; |\alpha| = \beta.$$

b) Số đo góc hình học $uOv$ cần tìm theo thứ tự là

- $\frac{5\pi}{7}$ ; $\frac{5\pi}{8}$ ; $\frac{2\pi}{9}$ ; $\approx 1{,}336$ (do $2003 \approx 319.2\pi - 1{,}336$ và $-\pi < -1{,}336 \le \pi$) ;
- $140^0$ ; $125^0$ ; $145^0$ ; $157^0$

**6.15.** a) Viết $\alpha = \alpha_0 + k_0 2\pi$ , $-\pi < \alpha_0 \le \pi$ , ($k_0 \in \mathbb{Z}$) và

$\beta = \beta_0 + l_0 2\pi$ , $-\pi < \beta_0 \le \pi$ , ($l_0 \in \mathbb{Z}$), ta có $|\alpha_0|$ là số đo của $\widehat{uOv}$, $|\beta_0|$ là số đo của $\widehat{u'Ov'}$ Hai góc hình học bằng nhau khi và chỉ khi

$$|\alpha_0| = |\beta_0| \Leftrightarrow \beta_0 = \alpha_0 \text{ hoặc } \alpha_0 = -\beta_0$$

$$\Leftrightarrow \beta - \alpha = k2\pi \text{ hoặc } \beta + \alpha = k2\pi, \; (k \in \mathbb{Z}).$$

b) Cặp góc hình học ứng với cặp góc lượng giác

- Có số đo $\frac{13\pi}{6}$ và $\frac{11\pi}{6}$ là bằng nhau $\left(\frac{13\pi}{6} + \frac{11\pi}{6} = 4\pi\right)$.
- Có số đo $\frac{13\pi}{6}$ và $-\frac{11\pi}{6}$ là bằng nhau $\left(\frac{13\pi}{6} - \left(-\frac{11\pi}{6}\right) = 4\pi\right)$.

- Có số đo $\frac{17\pi}{4}$ và $-\frac{15\pi}{4}$ là bằng nhau $\left(\frac{17\pi}{4}-\left(-\frac{15\pi}{4}\right)=8\pi\right)$.

- Có số đo $\frac{731\pi}{30}$ và $\frac{-11\pi}{30}$ là bằng nhau $\left(\frac{731\pi}{30}+\frac{-11\pi}{30}=24\pi\right)$.

- Có số đo $\frac{2003\pi}{8}$ và $\frac{-1211\pi}{8}$ là không bằng nhau

(do $\frac{2003+1211}{8}=\frac{3214}{8}$ không nguyên và $\frac{2003-1211}{8}=\frac{792}{8}=99$ không chẵn).

**6.16.** • N trùng với M khi và chỉ khi có số nguyên $l$ để $\frac{k\pi}{798}=\frac{\pi}{6}+l2\pi$ hay

$$k=133(1+12l).$$

Do $k\in\mathbb{N}$ nên $l\in\mathbb{N}$.

• N đối xứng với $M$ qua tâm của đường tròn khi và chỉ khi có số nguyên $l$ để $\frac{k\pi}{798}=\frac{\pi}{6}+(2l+1)\pi\Leftrightarrow k=133(7+12l)$. Do $k\in\mathbb{N}$ nên $l\in\mathbb{N}$.

**6.17.** *Cách 1*. Dùng hình vẽ, dễ dàng suy ra các kết quả sau

- $PN=PM\Leftrightarrow$ sđ $\overset{\curvearrowright}{AP}=\frac{13\pi}{24}+k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$ (có hai điểm $P$ như thế ứng với $k$ chẵn và $k$ lẻ).

- $NP=NM\Leftrightarrow$ sđ $\overset{\curvearrowright}{AP}=\frac{7\pi}{6}+k2\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$.

- $MP=MN\Leftrightarrow$ sđ $\overset{\curvearrowright}{AP}=-\frac{\pi}{12}+k2\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$.

*Cách 2*. Với ba điểm phân biệt $M$, $N$, $P$ trên đường tròn định hướng tâm $O$ gốc $A$, dễ thấy $PM=PN$ khi và chỉ khi $\widehat{POM}=\widehat{PON}$ nên theo bài tập 6.15 và do $M$ khác $N$, ta có sđ $(OP, OM)$ + sđ $(OP, ON)=k2\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$, tức là sđ $(OA, OM)$ − sđ $(OA, OP)$ + sđ $(OA, ON)$ − sđ $(OA, OP)=k2\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$.

Vậy $PM = PN \Leftrightarrow$ sđ $\overset{\curvearrowright}{AP} = \frac{1}{2}$(sđ $\overset{\curvearrowright}{AM}$ + sđ $\overset{\curvearrowright}{AN}$) + $k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

Từ đó suy ra các kết quả ở cách 1.

**6.18.** • Các điểm trên đường tròn lượng giác xác định bởi các số $\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$, ($k \in \mathbb{Z}$) là bốn điểm của hình vuông nội tiếp đường tròn đó, có hai cạnh song song với $OA$ ($O$ là tâm, $A$ là giao của đường tròn với trục hoành (là gốc của đường tròn lượng giác)), (chỉ cần lấy $k$ = 0, 1, 2, 3).

• Các điểm trên đường tròn lượng giác xác định bởi các số $k\frac{\pi}{3}$. ($k \in \mathbb{Z}$), là các đỉnh của lục giác đều nội tiếp đường tròn đó, trong đó một đỉnh là gốc $A$ của đường tròn lượng giác (chỉ cần lấy $k$ = 0, 1, 2, 3, 4, 5).

• Các điểm trên đường tròn lượng giác xác định bởi các số $k\frac{2\pi}{5}$. ($k \in \mathbb{Z}$), là các đỉnh của ngũ giác đều nội tiếp đường tròn đó, trong đó một đỉnh là gốc $A$ của đường tròn lượng giác (chỉ cần lấy $k$ = 0, 1, 2, 3, 4).

**6.19.**

| | sin | côsin | tang | Ghi chú |
|---|---|---|---|---|
| $120^o$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | $-\sqrt{3}$ | |
| $-30^o$ | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ | |
| $-225^o$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-1$ | (−225 = −360 + 135) |
| $750^o$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | (750 = 720 + 30) |
| $510^o$ | $\frac{1}{2}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ | (510 = 360 +150) |

|  | sin | côsin | tang | Ghi chú |
|---|---|---|---|---|
| $\frac{5\pi}{4}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | 1 |  |
| $\frac{7\pi}{2}$ | $-1$ | 0 | không xác định | $\frac{7\pi}{2} = 4\pi - \frac{\pi}{2}$ |
| $\frac{5\pi}{3}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $-\sqrt{3}$ | $\frac{5\pi}{3} = 2\pi - \frac{\pi}{3}$ |
| $\frac{-10\pi}{3}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | $-\sqrt{3}$ | $-\frac{10\pi}{3} = -4\pi + \frac{2\pi}{3}$ |
| $\frac{17\pi}{3}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $-\sqrt{3}$ | $\frac{17\pi}{3} = 6\pi - \frac{\pi}{3}$ |

**6.20.** Điểm xác định bởi $\alpha$ nằm ở góc phần tư II thì điểm xác định bởi

- $\alpha - \pi$ nằm ở góc phần tư IV.
- $\alpha + \frac{\pi}{2}$ nằm ở góc phần tư III.
- $\frac{\pi}{2} - \alpha$ nằm ở góc phần tư IV.
- $\frac{3\pi}{2} - \alpha$ nằm ở góc phần tư II.

**6.21.** Kí hiệu $M$ là điểm thuộc đường tròn lượng giác xác định bởi số $\alpha$ thì :

|  | Dấu |  |  |
|---|---|---|---|
|  | sin | côsin | tang |
| $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow M \in \text{(III)}$ | $-$ | $-$ | $+$ |
| $\frac{3\pi}{2} < \alpha < \frac{7\pi}{4} \Rightarrow M \in \text{(IV)}$ | $-$ | $+$ | $-$ |
| $\frac{7\pi}{4} < \alpha < 2\pi \Rightarrow M \in \text{(IV)}$ | $-$ | $+$ | $-$ |
| $2\pi < \alpha < 2{,}5\pi \Rightarrow M \in \text{(I)}$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $3\pi < \alpha < \frac{10\pi}{3} \Rightarrow M \in \text{(III)}$ | $-$ | $-$ | $+$ |
| $\frac{5\pi}{2} < \alpha < \frac{11\pi}{4} \Rightarrow M \in \text{(II)}$ | $+$ | $-$ | $-$ |

(Các kí hiệu (I), (II), (III), (IV) theo thứ tự chỉ các góc phần tư I, II, III, IV)

**6.22.** $M$ có toạ độ $(x\,;\,y) \neq (0\,;\,0)$, đặt sđ $(Ox, OM) = \alpha$ thì

$$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\ ;\ \sin\alpha = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$ Vậy

|  | $\cos\alpha$ | $\sin\alpha$ | $\tan\alpha$ | $\cot\alpha$ |
|---|---|---|---|---|
| $M(3\,;\,-4)$ | $\frac{3}{5}$ | $-\frac{4}{5}$ | $-\frac{4}{3}$ | $-\frac{3}{4}$ |
| $M(4\,;\,-3)$ | $\frac{4}{5}$ | $-\frac{3}{5}$ | $-\frac{3}{4}$ | $-\frac{4}{3}$ |
| $M(-12\,;\,-9)$ | $-\frac{4}{5}$ | $-\frac{3}{5}$ | $\frac{3}{4}$ | $\frac{4}{3}$ |
| $M(-1\,;\,1)$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-1$ | $-1$ |

**6.23.** $A = -\frac{1}{2}\ ;\ B = 0.$

**6.24.** • Các điểm trên đường tròn lượng giác xác định bởi các số $\frac{k2\pi}{5}$ $(k \in \mathbb{Z})$ là các đỉnh của ngũ giác đều nội tiếp đường tròn đó mà một đỉnh là $A(1\,;\,0)$. Từ đó quan sát hình ta thấy :

$\sin\frac{k2\pi}{5}$ $(k \in \mathbb{Z})$ có năm giá trị phân biệt,

$\cos\frac{k2\pi}{5}$ $(k \in \mathbb{Z})$ có ba giá trị phân biệt,

$\tan\frac{k2\pi}{5}$ $(k \in \mathbb{Z})$ có năm giá trị phân biệt.

• Các điểm trên đường tròn lượng giác xác định bởi các số $\frac{k\pi}{3}$ $(k \in \mathbb{Z})$ là các đỉnh của một lục giác đều nội tiếp đường tròn đó mà một đỉnh là $A(1\,;\,0)$. Từ đó quan sát hình ta thấy :

$\tan\frac{k\pi}{3}$ $(k \in \mathbb{Z})$ có ba giá trị phân biệt (cụ thể là $0\,;\ \sqrt{3}\,;\,-\sqrt{3}$).

**6.25.** $\sin 10^\circ \approx 0{,}174$ ; $\cos\frac{\pi}{9} \approx 0{,}940$ ; $\tan\frac{10\pi}{9} \approx 0{,}364$ ; $\cot(1{,}35) \approx 0{,}224$.

**6.26.** a) $\cos\alpha = \frac{5}{13}$. $\sin\alpha < 0$ nên $\sin\alpha = -\sqrt{1 - \frac{25}{169}} = -\frac{12}{13}$. do đó $\tan\alpha = -\frac{12}{5}$.

$\cot\alpha = -\frac{5}{12}$

b) $\sin\alpha = \frac{4}{5}$. $\cos\alpha < 0$ nên $\cos\alpha = -\sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \frac{-3}{5}$. Từ đó suy ra $\tan\alpha = \frac{-4}{3}$,

$\cot\alpha = -\frac{3}{4}$.

c) $\tan\alpha = \frac{15}{8}$. $\cos\alpha < 0$ nên $\cos\alpha = -\sqrt{\dfrac{1}{1 + \frac{225}{64}}} = -\frac{8}{17}$, từ đó $\sin\alpha = -\frac{15}{17}$ ;

$\cot\alpha = \frac{8}{15}$.

d) $\cot\alpha = -3$, $\sin\alpha < 0$ nên $\sin\alpha = -\sqrt{\frac{1}{1+9}} = -\frac{1}{\sqrt{10}}$, từ đó $\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}$ ;

$\tan\alpha = -\frac{1}{3}$.

**6.27.** • $\dfrac{2\sin\alpha + 3\cos\alpha}{4\sin\alpha - 5\cos\alpha} = \dfrac{2\tan\alpha + 3}{4\tan\alpha - 5} = \dfrac{9}{7}$ khi $\tan\alpha = 3$.

• $\dfrac{3\sin\alpha - 2\cos\alpha}{5\sin^3\alpha + 4\cos^3\alpha} = \dfrac{3\tan\alpha - 2}{\cos^2\alpha(5\tan^3\alpha + 4)}$

$= \dfrac{3\tan\alpha - 2}{5\tan^3\alpha + 4}\left(1 + \tan^2\alpha\right) = \dfrac{70}{139}$ khi $\tan\alpha = 3$.

**6.28.** a) $\dfrac{\tan^2\alpha - \sin^2\alpha}{\cot^2\alpha - \cos^2\alpha} = \dfrac{\sin^2\alpha\left(\dfrac{1}{\cos^2\alpha} - 1\right)}{\cos^2\alpha\left(\dfrac{1}{\sin^2\alpha} - 1\right)} = \dfrac{\sin^2\alpha\tan^2\alpha}{\cos^2\alpha\cot^2\alpha} = \tan^6\alpha$.

b) $\dfrac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\cos^3\alpha} = \dfrac{\cos\alpha(\tan\alpha + 1)}{\cos^3\alpha} = \left(\tan^2\alpha + 1\right)\left(\tan\alpha + 1\right)$.

$= 1 + \tan\alpha + \tan^2\alpha + \tan^3\alpha.$

c) $\sqrt{\sin^2\alpha(1+\cot\alpha)+\cos^2\alpha(1+\tan\alpha)}$

$= \sqrt{\sin^2\alpha + \sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha + \cos\alpha\sin\alpha}$

$= \sqrt{(\sin\alpha + \cos\alpha)^2} = |\sin\alpha + \cos\alpha|$.

d) $\sin^2\alpha\tan^2\alpha + 4\sin^2\alpha - \tan^2\alpha + 3\cos^2\alpha$

$= -\tan^2\alpha\cos^2\alpha + 4\sin^2\alpha + 3\cos^2\alpha$

$= 3(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) = 3$.

**6.29.** Cho $\tan\alpha + \cot\alpha = m$, ta có :

a) $\tan^2\alpha + \cot^2\alpha = (\tan\alpha + \cot\alpha)^2 - 2\tan\alpha\cot\alpha = m^2 - 2$.

b) $(\tan\alpha - \cot\alpha)^2 = \tan^2\alpha + \cot^2\alpha - 2\tan\alpha\cot\alpha = m^2 - 4$. Vậy $|\tan\alpha - \cot\alpha| = \sqrt{m^2-4}$ (để ý rằng, do $\tan\alpha.\cot\alpha = 1$, nên $|\tan\alpha + \cot\alpha| \geq 2$, từ đó $m^2 \geq 4$).

c) $\tan^3\alpha + \cot^3\alpha = (\tan\alpha + \cot\alpha)^3 - 3\tan\alpha\cot\alpha(\tan\alpha + \cot\alpha) = m^3 - 3m$.

**6.30.** Cho $\sin\alpha + \cos\alpha = m$, ta có :

a) $\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{2}\left[(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 - 1\right] = \frac{m^2-1}{2}$

b) $(\sin\alpha - \cos\alpha)^2 = 1 - 2\sin\alpha\cos\alpha = 1 - (m^2 - 1) = 2 - m^2$,

từ đó $|\sin\alpha - \cos\alpha| = \sqrt{2-m^2}$ (lập luận này cũng chứng tỏ rằng, nếu $\sin\alpha + \cos\alpha = m$ thì $2 - m^2 \geq 0$, tức là ta luôn có $|\sin\alpha + \cos\alpha| \leq \sqrt{2}$ ; còn có thể suy ra bất đẳng thức này từ nhiều lập luận khác).

c) $\sin^3\alpha + \cos^3\alpha = (\sin\alpha + \cos\alpha)^3 - 3\sin\alpha\cos\alpha(\sin\alpha + \cos\alpha)$

$$= m^3 - 3\left(\frac{m^2-1}{2}\right)m = \frac{m(3-m^2)}{2}$$

d) $\sin^6\alpha + \cos^6\alpha = (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^3 - 3\sin^2\alpha\cos^2\alpha(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)$

$$= 1 - 3\left(\frac{m^2-1}{2}\right)^2 = \frac{-3m^4 + 6m^2 + 1}{4}$$

**6.31.** a) $\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}+\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}=\sqrt{\dfrac{(1-\cos\alpha)^2}{\sin^2\alpha}}+\sqrt{\dfrac{(1+\cos\alpha)^2}{\sin^2\alpha}}$

$=\dfrac{1-\cos\alpha+1+\cos\alpha}{|\sin\alpha|}=\dfrac{2}{|\sin\alpha|}$. (Chú ý rằng $|\cos\alpha|\leq 1$).

b) $\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}-\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}=\sqrt{\dfrac{(1+\cos\alpha)^2}{\sin^2\alpha}}-\sqrt{\dfrac{(1-\cos\alpha)^2}{\sin^2\alpha}}$

$=\dfrac{1+\cos\alpha-1+\cos\alpha}{|\sin\alpha|}=\dfrac{2\cos\alpha}{|\sin\alpha|}$

**6.32.** a) 0 ; b) 0 ; c) $2\sin\alpha$ ;

d) $-2\sin\alpha$ ; e) 0 ; f) 0 ; g) $2\cos\alpha$.

**6.33.** a) $\sin\left(\dfrac{5\pi}{4}+\alpha\right)=\sin\left(2\pi-\dfrac{3\pi}{4}+\alpha\right)=\sin\left(-\dfrac{3\pi}{4}+\alpha\right)=-\sin\left(\dfrac{3\pi}{4}-\alpha\right)$.

b) $\cos\left(\alpha-\dfrac{2\pi}{3}\right)=-\cos\left(\alpha-\dfrac{2\pi}{3}+\pi\right)=-\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{3}\right)$.

c) $\cos\left(\alpha-\dfrac{2\pi}{3}\right)=\cos\left(\alpha+\dfrac{4\pi}{3}-2\pi\right)=\cos\left(\alpha+\dfrac{4\pi}{3}\right)$.

**6.34.** a) Đáp số theo thứ tự là

$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ; 1 ; $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

b) $-\dfrac{3}{2}$. c) $-1+\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

**6.35.** a) $\cos\dfrac{\pi}{9}+\cos\dfrac{2\pi}{9}+\ldots+\cos\dfrac{8\pi}{9}=0$, do $\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$.

b) Do $\sin\dfrac{\pi}{3}=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{6}\right)=\cos\dfrac{\pi}{6}$ nên $\sin^2\dfrac{\pi}{3}+\sin^2\dfrac{\pi}{6}=1$.

Do $\sin\dfrac{7\pi}{18}=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{9}\right)=\cos\dfrac{\pi}{9}$ nên $\sin^2\dfrac{7\pi}{18}+\sin^2\dfrac{\pi}{9}=1$.

Do $\sin\dfrac{5\pi}{18}=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{2\pi}{9}\right)=\cos\dfrac{2\pi}{9}$ nên $\sin^2\dfrac{2\pi}{9}+\sin^2\dfrac{5\pi}{18}=1$.

Vậy $\sin^2\dfrac{\pi}{3}+\sin^2\dfrac{\pi}{6}+\sin^2\dfrac{\pi}{9}+\sin^2\dfrac{2\pi}{9}+\sin^2\dfrac{5\pi}{18}+\sin^2\dfrac{7\pi}{18}=3$.

c) Do $\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = -\sin\frac{\pi}{3}$, nên $\cos^2\frac{\pi}{3} + \cos^2\frac{5\pi}{6} = 1$.

Do $\cos\frac{11\pi}{18} = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{9}\right) = -\sin\frac{\pi}{9}$. nên $\cos^2\frac{\pi}{9} + \cos^2\frac{11\pi}{18} = 1$.

Do $\cos\frac{13\pi}{18} = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{9}\right) = -\sin\frac{2\pi}{9}$. nên $\cos^2\frac{13\pi}{18} + \cos^2\frac{2\pi}{9} = 1$.

Vậy $\cos^2\frac{\pi}{3} + \cos^2\frac{5\pi}{6} + \cos^2\frac{\pi}{9} + \cos^2\frac{11\pi}{18} + \cos^2\frac{13\pi}{18} + \cos^2\frac{2\pi}{9} = 3$.

d) Do $\cos\frac{6\pi}{5} = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{5}\right) = -\cos\frac{\pi}{5}$ ; $\cos\frac{7\pi}{5} = -\cos\frac{2\pi}{5}$ ;

$\cos\frac{8\pi}{5} = -\cos\frac{3\pi}{5}$ ; $\cos\frac{9\pi}{5} = -\cos\frac{4\pi}{5}$ ; $\cos\pi = -1$ nên

$$\cos\frac{\pi}{5} + \cos\frac{2\pi}{5} + \ldots + \cos\frac{9\pi}{5} = -1.$$

e) Tương tự đối với sin, nhưng ở đây $\sin\pi = 0$, ta có :

$$\sin\frac{\pi}{5} + \sin\frac{2\pi}{5} + \ldots + \sin\frac{9\pi}{5} = 0.$$

(*Chú ý* : Ta cũng có thể xét thập giác đều có các đỉnh là $A_k$ là các điểm trên đường tròn lượng giác, xác định bởi các số $\frac{k\pi}{5}$ (k = 1 ; 2 ; 3 ; 4 ;... ; 9 ; 10) và nhận xét rằng $\overline{OA_1} + \overline{OA_2} + \ldots + \overline{OA_{10}} = \vec{0}$).

**6.36.**

| **Điểm xác định bởi** | **Nằm trong góc phần tư** | | | |
|---|---|---|---|---|
| $\alpha$ | I | II | III | IV |
| $\alpha + \frac{\pi}{2}$ | II | III | IV | I |
| $\alpha + \pi$ | III | IV | I | II |
| $\alpha - \frac{\pi}{2}$ | IV | I | II | III |
| $-\alpha$ | IV | III | II | I |
| $-\alpha + \frac{\pi}{2}$ | I | IV | III | II |
| $-\alpha + \pi$ | II | I | IV | III |

**6.37.** a) Theo mô tả của cung lượng giác, hai điểm $M$, $N$ trên đường tròn định hướng tâm $O$ là hai điểm đối xứng qua đường thẳng $OP$ ($P$ thuộc đường tròn đó) khi và chỉ khi

$$\text{sđ}\,\overset{\curvearrowright}{PM}+\text{sđ}\,\overset{\curvearrowright}{PN} = k2\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$$

b) Từ câu a) nếu $M$, $N$, $P$ thuộc đường tròn lượng giác xác định theo thứ tự bởi các số $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ thì $M$, $N$ là hai điểm đối xứng qua đường thẳng $OP$ khi và chỉ khi $\alpha - \gamma + \beta - \gamma = k2\pi$ tức là $\alpha + \beta = 2\gamma + k2\pi$, ($k \in \mathbb{Z}$).

c) Coi $P$ xác định bởi số $\frac{3\pi}{4}$ thì hai điểm $M$, $N$ xác định theo thứ tự bởi $\alpha$, $\beta$ là hai điểm đối xứng nhau qua $OP$ (đường phân giác của góc phần tư II và IV) khi và chỉ khi

$$\alpha + \beta = \frac{3\pi}{2} + k2\pi.$$

d) Coi các điểm $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$ trên đường tròn lượng giác xác định theo thứ tự bởi $\frac{\pi}{4}$ ; $\frac{\pi}{2}$ ; $\frac{5\pi}{6}$ ; $\frac{13\pi}{12}$. Ta phải chứng minh $A_1A_2A_3A_4$ là hình thang cân.

*Cách 1.* Hai cặp điểm $A_1$ và $A_4$ ; $A_2$ và $A_3$ đối xứng nhau qua cùng một đường thẳng do $\frac{\pi}{4} + \frac{13\pi}{12} = \frac{\pi}{2} + \frac{5\pi}{6} = \frac{4\pi}{3}$

*Cách 2.* Góc hình học $A_1OA_2$ có số đo $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$ và góc hình học $A_3OA_4$ có số đo $\frac{13\pi}{12} - \frac{5\pi}{6} = \frac{\pi}{4}$, nên $\widehat{A_1OA_2} = \widehat{A_3OA_4}$

**6.38.** • $\sin\left(\alpha + 2l\frac{\pi}{2}\right) = \sin(\alpha + l\pi) = (-1)^l \sin\alpha$ ;

$$\sin\left[\alpha + (2l+1)\frac{\pi}{2}\right] = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2} + l\pi\right) = (-1)^l \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = (-1)^l \cos\alpha.$$

- $\cos\left(\alpha + 2l\frac{\pi}{2}\right) = \cos(\alpha + l\pi) = (-1)^l\cos\alpha$ ;

$\cos\left[\alpha + (2l+1)\frac{\pi}{2}\right] = \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2} + l\pi\right) = (-1)^l\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$

$= (-1)^l(-\sin\alpha) = (-1)^{l+1}\sin\alpha.$

- Từ đó $\tan\left(\alpha + 2l\frac{\pi}{2}\right) = \tan\alpha$ ;

$\tan\left[\alpha + (2l+1)\frac{\pi}{2}\right] = -\cot\alpha$ .

**6.39.** Coi $AB$ có độ dài là 1 thì dễ thấy $AE = AB = 1$, $BE = CE = \sqrt{2}$ ;

$AC = AE + EC = 1 + \sqrt{2}$ ; $BC = \sqrt{1 + \left(1+\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{2\left(2+\sqrt{2}\right)}$.

Từ đó $\cos\frac{\pi}{8} = \frac{AC}{BC} = \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2\left(2+\sqrt{2}\right)}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ ;

$$\sin\frac{\pi}{8} = \frac{AB}{BC} = \frac{1}{\sqrt{2\left(2+\sqrt{2}\right)}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}.$$

**6.40.** Ta có $\frac{AD}{AB} = \frac{DC}{BC} = \frac{AC - AD}{BC} = \frac{AC}{BC} - \frac{AD}{AB}\cdot\frac{AB}{BC}$.

Từ đó $\frac{AD}{AB}\left(1 + \frac{AB}{BC}\right) = \frac{AC}{BC}$, tức là $\tan\frac{\alpha}{2}\left(1+\cos\alpha\right) = \sin\alpha$, suy ra

$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$.

Với $\alpha = \frac{\pi}{6}$ ta được $\tan\frac{\pi}{12} = \frac{1}{2\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = \frac{1}{2+\sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3}.$

**6.41.** Dễ thấy $BI = IC$,

nên $\cos 2\alpha = \dfrac{AI}{IC} = \dfrac{AI}{BI} = \dfrac{AB - BI}{BI} = \dfrac{AB}{BI} - 1 = \dfrac{AB}{BC}.\dfrac{2BM}{BI} - 1$,

mà $\cos\alpha = \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{BM}{BI}$, nên $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$.

**6.42.** a) $\sin\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3} - 1\right) = \dfrac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$ ;

$\cos\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3} + 1\right) = \dfrac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}$ ; $\tan\dfrac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3}$.

b) $\sin 75^\circ = \cos\dfrac{\pi}{12}$ ; $\cos 75^\circ = \sin\dfrac{\pi}{12}$ ; $\tan 75^\circ = \dfrac{1}{\tan\dfrac{\pi}{12}} = 2 + \sqrt{3}$.

$\sin 105^\circ = \cos\dfrac{\pi}{12}$ ; $\cos 105^\circ = -\sin\dfrac{\pi}{12}$ ; $\tan 105^\circ = -\dfrac{1}{\tan\dfrac{\pi}{12}}$.

$\sin 165^\circ = \sin\dfrac{\pi}{12}$ ; $\cos 165^\circ = -\cos\dfrac{\pi}{12}$ ; $\tan 165^\circ = -\tan\dfrac{\pi}{12}$.

**6.43.** a) Dễ thấy $BC = BD = AD$, nên đặt $BC = a$, $AB = b$ thì $\cos\dfrac{2\pi}{5} = \dfrac{a}{2b}$. (1)

Ta có $\dfrac{DC}{DA} = \dfrac{BC}{BA}$ suy ra $\dfrac{b - a}{a} = \dfrac{a}{b}$, tức là $\dfrac{1 - \dfrac{a}{b}}{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{a}{b}$. (2)

Từ (1) và (2) ta có $\dfrac{1 - 2\cos\dfrac{2\pi}{5}}{2\cos\dfrac{2\pi}{5}} = 2\cos\dfrac{2\pi}{5}$ hay

$$4\cos^2\frac{2\pi}{5} + 2\cos\frac{2\pi}{5} - 1 = 0, \text{ tức là } 4x^2 + 2x - 1 = 0. \quad (3)$$

b) Giải phương trình (3), ta được $x = \dfrac{-1 - \sqrt{5}}{4}$ hoặc $x = \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{4}$.

Từ đó $\cos\dfrac{2\pi}{5} = \dfrac{-1 - \sqrt{5}}{4} < 0$ (loại) hoặc $\cos\dfrac{2\pi}{5} = \dfrac{\sqrt{5} - 1}{4}$. Suy ra

$$\cos\frac{\pi}{5} = \sqrt{\frac{1+\cos\frac{2\pi}{5}}{2}} = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{8}} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}\ ;$$

$$\sin\frac{\pi}{5} = \sqrt{\frac{1-\cos\frac{2\pi}{5}}{2}} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}\ ;\ \tan\frac{\pi}{5} = \frac{\sin\frac{\pi}{5}}{\cos\frac{\pi}{5}} = \sqrt{5-2\sqrt{5}}$$

c) $$\sin 18^\circ = \sin\frac{\pi}{10} = \sin\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{5}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{5}}{2}} = \frac{1}{4}\sqrt{2\left(3-\sqrt{5}\right)}$$

$$\cos 18^\circ = \cos\frac{\pi}{10} = \cos\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{5}\right) = \sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{5}}{2}} = \frac{1}{4}\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}.$$

$$\tan 18^\circ = \frac{\sin 18^\circ}{\cos 18^\circ} = \sqrt{1-\frac{2\sqrt{5}}{5}}$$

d) $$\sin 6^\circ = \sin(36^\circ - 30^\circ) = \sin\left(\frac{\pi}{5}-\frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{6} - \cos\frac{\pi}{5}\sin\frac{\pi}{6}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{\pi}{5} - \frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{5} = \frac{1}{8}\left[\sqrt{6\left(5-\sqrt{5}\right)} - \left(\sqrt{5}+1\right)\right]\quad (\approx 0{,}1045).$$

$$\cos 6^\circ = \cos(36^\circ - 30^\circ) = \cos\left(\frac{\pi}{5}-\frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{5}\sin\frac{\pi}{6}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{\pi}{5} + \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{5} = \frac{1}{8}\left[\sqrt{3}\left(\sqrt{5}+1\right) + \sqrt{2\left(5-\sqrt{5}\right)}\right](\approx 0{,}9945).$$

**6.44.** $$\cos 2\alpha = \frac{1}{8}\ ;\qquad \sin 2\alpha = \frac{3\sqrt{7}}{8}\ ;$$

$$\cos 2\beta = \frac{7}{25}\ ;\qquad \sin 2\beta = -\frac{24}{25}.$$

$$\cos(\alpha+\beta) = -\frac{3}{5}\left(1+\frac{\sqrt{7}}{4}\right);$$

$$\sin(\alpha-\beta) = -\frac{1}{5}\left(\sqrt{7}+\frac{9}{4}\right).$$

*Gợi ý.* $\cos\alpha = \frac{3}{4}$, $\sin\alpha > 0$ nên $\sin\alpha = \sqrt{1 - \frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{4}$ ;

$\sin\beta = \frac{3}{5}$, $\cos\beta < 0$ nên $\cos\beta = -\sqrt{1 - \frac{9}{25}} = -\frac{4}{5}$ ;

**6.45.** a) $\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ ; $\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$ ;

$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}$.

b) $\cos\beta = -\sqrt{1 - \frac{9}{25}} = -\frac{4}{5}$ ; $\cos\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{1 - \frac{4}{5}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$ ;

$\sin\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{1 + \frac{4}{5}}{2}} = \frac{3}{\sqrt{10}}$ ; $\tan\frac{\beta}{2} = 3$.

**6.46.** a) $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 2m^2 - 1$ ;

$\sin^2 2\alpha = 4\sin^2\alpha\cos^2\alpha = 4\cos^2\alpha\,(1 - \cos^2\alpha) = 4m^2(1 - m^2)$ ;

$\tan^2 2\alpha = \frac{\sin^2 2\alpha}{\cos^2 2\alpha} = \frac{4m^2(1 - m^2)}{(2m^2 - 1)^2}$.

b) Không, chẳng hạn $\cos\frac{\pi}{3} = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$, nhưng

$\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ; $\tan\frac{2\pi}{3} = -\sqrt{3}$, $\tan\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$

**6.47.** a) $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 1 - 2m^2$ ;

$\sin^2 2\alpha = 4\sin^2\alpha\cos^2\alpha = 4\sin^2\alpha(1 - \sin^2\alpha) = 4m^2(1 - m^2)$ ;

$\tan^2 2\alpha = \frac{\sin^2 2\alpha}{\cos^2 2\alpha} = \frac{4m^2(1 - m^2)}{(1 - 2m^2)^2}$.

b) Không, chẳng hạn $\sin\frac{\pi}{3} = \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

nhưng $\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\left(2.\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$$\tan\frac{2\pi}{3} = -\sqrt{3},\ \tan\left(2.\frac{2\pi}{3}\right) = \sqrt{3}.$$

**6.48.** $\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2} = \frac{1+m}{2}$ ;

$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2} = \frac{1-m}{2}$ ; $\tan^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-m}{1+m}$.

**6.49.** a) $\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = 2\tan\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{2t}{1+t^2}$ (giả sử $\cos\frac{\alpha}{2} \neq 0$).

$\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1 = \frac{2}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}} - 1 = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ (giả sử $\cos\frac{\alpha}{2} \neq 0$).

b) Khi $\sin\alpha\cos\alpha \neq 0$, ta có

$$\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} + \frac{1}{\tan\alpha} + 4\sin\alpha = \frac{1}{\sin\alpha} + 4\sin\alpha.$$

Vậy khi $t = \tan\frac{\alpha}{2} \neq 0$ và $t^2 \neq 1$, ta có

$$\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} + \frac{1}{\tan\alpha} + 4\sin\alpha = \frac{t^4 + 18t^2 + 1}{2t(1+t^2)}$$

**6.50.** a) $$\frac{\sin\alpha + \sin 2\alpha}{1+\cos\alpha+\cos 2\alpha} = \frac{\sin\alpha(1+2\cos\alpha)}{1+\cos\alpha+2\cos^2\alpha-1}$$

$$= \frac{\sin\alpha(1+2\cos\alpha)}{\cos\alpha(1+2\cos\alpha)} = \tan\alpha.$$

b) $$\frac{2\sin 2\alpha - \sin 4\alpha}{2\sin 2\alpha + \sin 4\alpha} = \frac{2\sin 2\alpha(1-\cos 2\alpha)}{2\sin 2\alpha(1+\cos 2\alpha)} = \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \tan^2\alpha.$$

**6.51.** a) $\sin^2(\alpha + \beta) = (\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha)^2$

$= \sin^2\alpha\cos^2\beta + \sin^2\beta\cos^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha\sin\beta\cos\beta$

$= \sin^2\alpha(1 - \sin^2\beta) + \sin^2\beta(1 - \sin^2\alpha) + 2\sin\alpha\cos\alpha\sin\beta\cos\beta$

$= \sin^2\alpha + \sin^2\beta - 2\sin^2\alpha\sin^2\beta + 2\sin\alpha\cos\alpha\sin\beta\cos\beta$

$= \sin^2\alpha + \sin^2\beta + 2\sin\alpha\sin\beta(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta)$

$= \sin^2\alpha + \sin^2\beta + 2\sin\alpha\sin\beta\cos(\alpha + \beta).$

b) $m^2 + n^2 = (\cos\alpha + \cos\beta)^2 + (\sin\alpha + \sin\beta)^2$

$= \cos^2\alpha + \sin^2\alpha + \cos^2\beta + \sin^2\beta + 2(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta)$

$= 2 + 2\cos(\alpha - \beta).$

Do đó $\cos(\alpha - \beta) = \dfrac{m^2 + n^2 - 2}{2}$

c) $\cos(\alpha - \beta)\cos(\alpha + \beta)$

$= \frac{1}{2}(\cos 2\alpha + \cos 2\beta) = \frac{1}{2}(2\cos^2\alpha - 1 + 2\cos^2\beta - 1)$

$= \cos^2\alpha + \cos^2\beta - 1 = p - 1.$

**6.52.** a) Nếu $\cos(\alpha + \beta) = 0$ thì

$\sin(\alpha + 2\beta) = \sin\alpha\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos\alpha$

$= \sin\alpha(1 - 2\sin^2\beta) + 2\sin\beta\cos\beta\cos\alpha = \sin\alpha + 2\sin\beta(-\sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta)$

$= \sin\alpha + 2\sin\beta\cos(\alpha + \beta) = \sin\alpha.$

b) Ta có

$\sin(2\alpha + \beta) = 3\sin\beta \Leftrightarrow 2\sin\alpha\cos\alpha\cos\beta + (2\cos^2\alpha - 1)\sin\beta = 3\sin\beta$

$\Leftrightarrow \cos\alpha\sin(\alpha + \beta) = 2\sin\beta. \quad (1)$

Mặt khác

$\sin(2\alpha + \beta) = 3\sin\beta \Leftrightarrow 2\sin\alpha\cos\alpha\cos\beta + (1 - 2\sin^2\alpha)\sin\beta = 3\sin\beta$

$\Leftrightarrow \sin\alpha\cos(\alpha + \beta) = \sin\beta. \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $\cot\alpha\tan(\alpha + \beta) = 2$. Do đó $\tan(\alpha + \beta) = 2\tan\alpha$.

**6.53.** a) $4\cos15^{\circ}\cos21^{\circ}\cos24^{\circ} - \cos12^{\circ} - \cos18^{\circ}$

$$= 2\cos15^{\circ}(\cos45^{\circ} + \cos3^{\circ}) - 2\cos15^{\circ}\cos3^{\circ}$$

$$= 2\cos15^{\circ}\cos45^{\circ} = \cos60^{\circ} + \cos30^{\circ} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

b) $\tan30^{\circ} + \tan40^{\circ} + \tan50^{\circ} + \tan60^{\circ} = \dfrac{\sin90^{\circ}}{\cos30^{\circ}\cos60^{\circ}} + \dfrac{\sin90^{\circ}}{\cos40^{\circ}\cos50^{\circ}}$

$$= \frac{\cos90^{\circ} + \cos10^{\circ} + \cos90^{\circ} + \cos30^{\circ}}{\frac{1}{2}\cos10^{\circ}\cos30^{\circ}} = \frac{4\cos20^{\circ}\cos10^{\circ}}{\cos10^{\circ}\cos30^{\circ}}$$

$$= \frac{8}{\sqrt{3}}\cos20^{\circ} = \frac{8\sqrt{3}}{3}\cos20^{\circ}$$

c) $\dfrac{1}{\sin18^{\circ}} - \dfrac{1}{\sin54^{\circ}} = \dfrac{\sin54^{\circ} - \sin18^{\circ}}{\sin18^{\circ}\sin54^{\circ}} = \dfrac{2\cos36^{\circ}\sin18^{\circ}}{\sin18^{\circ}\sin54^{\circ}} = \dfrac{2\cos36^{\circ}}{\sin54^{\circ}}$

$$= \frac{2\cos36^{\circ}}{\cos36^{\circ}} = 2.$$

d) $\tan9^{\circ} - \tan27^{\circ} - \tan63^{\circ} + \tan81^{\circ} = \tan9^{\circ} + \tan81^{\circ} - (\tan27^{\circ} + \tan63^{\circ})$

$$= \left(\frac{\sin9^{\circ}}{\cos9^{\circ}} + \frac{\sin81^{\circ}}{\cos81^{\circ}}\right) - \left(\frac{\sin27^{\circ}}{\cos27^{\circ}} + \frac{\sin63^{\circ}}{\cos63^{\circ}}\right)$$

$$= \frac{1}{\sin9^{\circ}\cos9^{\circ}} - \frac{1}{\sin27^{\circ}\cos27^{\circ}}$$

$$= \frac{2}{\sin18^{\circ}} - \frac{2}{\sin54^{\circ}} = 2.2 = 4.$$

**6.54.** a) $\dfrac{\sin x + \sin y}{2} = \sin\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2} \le \sin\dfrac{x+y}{2}$. (Với chú ý rằng

$$\sin\frac{x+y}{2} \ge 0 \text{ do } 0 \le \frac{x+y}{2} \le \pi \text{ và } \cos\frac{x-y}{2} \le 1)$$

b) $\dfrac{\cos x + \cos y}{2} = \cos\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2} \le \cos\dfrac{x+y}{2}$ (Với chú ý rằng

$$\cos\frac{x+y}{2} \ge 0 \text{ do } -\frac{\pi}{2} \le \frac{x+y}{2} \le \frac{\pi}{2} \text{ và } \cos\frac{x-y}{2} \le 1).$$

**6.55.** $$\frac{\sin\alpha + \sin\beta\cos(\alpha + \beta)}{\cos\alpha - \sin\beta\sin(\alpha + \beta)} = \frac{\sin\alpha + \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha + 2\beta) - \sin\alpha\right]}{\cos\alpha + \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha + 2\beta) - \cos\alpha\right]}$$

$$= \frac{\sin(\alpha + 2\beta) + \sin\alpha}{\cos(\alpha + 2\beta) + \cos\alpha} = \frac{2\sin(\alpha + \beta)\cos\beta}{2\cos(\alpha + \beta)\cos\beta} = \tan(\alpha + \beta).$$

**6.56.** a) Vì $\sin A = 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$ và

$$\frac{\cos B + \cos C}{\sin B + \sin C} = \frac{2\cos\frac{B + C}{2}\cos\frac{B - C}{2}}{2\sin\frac{B + C}{2}\cos\frac{B - C}{2}} = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}\right)} = \frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}$$

nên dễ thấy : $\sin A = \dfrac{\cos B + \cos C}{\sin B + \sin C} \Leftrightarrow 2\cos^2\dfrac{A}{2} = 1 \Leftrightarrow \cos A = 0$

$\Leftrightarrow \widehat{A}$ là góc vuông.

b) *Cách 1*

$$\frac{\sin A}{\sin B} = \frac{\cos B + \cos C}{\cos C + \cos A} \Leftrightarrow \frac{\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}} = \frac{\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B - C}{2}}{\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C - A}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{A}{2}\cos\frac{C - A}{2} = \cos\frac{B}{2}\cos\frac{B - C}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{C}{2} + \cos\left(A - \frac{C}{2}\right) = \cos\left(B - \frac{C}{2}\right) + \cos\frac{C}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(A - \frac{C}{2}\right) = \cos\left(B - \frac{C}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left|A - \frac{C}{2}\right| = \left|B - \frac{C}{2}\right| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\widehat{A} = \widehat{B}\\ \widehat{A} + \widehat{B} = \widehat{C}.\end{array}\right.$$

*Cách 2*

$$\frac{\sin A}{\sin B} = \frac{\cos B + \cos C}{\cos C + \cos A} \Leftrightarrow \sin A\cos A - \sin B\cos B = \cos C(\sin B - \sin A)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(\sin 2A - \sin 2B) = \cos C(\sin B - \sin A)$$

$$\Leftrightarrow \cos(A + B)\sin(A - B) = 2\cos C\cos\frac{B + A}{2}\sin\frac{B - A}{2}$$

$$\Leftrightarrow -\cos C\sin\frac{A - B}{2}\cos\frac{A - B}{2} = -\cos C\sin\frac{A - B}{2}\cos\frac{A + B}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos C\sin\frac{A - B}{2}\left(\cos\frac{A + B}{2} - \cos\frac{A - B}{2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos C\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{A - B}{2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos C = 0\\ \sin\dfrac{A - B}{2} = 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\widehat{C}\text{ vuông}\\ \widehat{A} = \widehat{B}.\end{array}\right.$$

**6.57.** a) Với $k = 1, 2, 3, \ldots, n$, ta có

$$\sin k\alpha\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}\left[\cos\frac{(2k - 1)\alpha}{2} - \cos\frac{(2k + 1)\alpha}{2}\right]$$

nên

$$S.\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}\left[\left(\cos\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{3\alpha}{2}\right) + \left(\cos\frac{3\alpha}{2} - \cos\frac{5\alpha}{2}\right) + \ldots +\right.$$

$$\left. + \left(\cos\frac{(2n - 1)\alpha}{2} - \cos\frac{(2n + 1)\alpha}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(\cos\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{(2n + 1)\alpha}{2}\right)\right] = \sin\frac{n\alpha}{2}\sin\frac{(n + 1)\alpha}{2}.$$

b) Với $k = 1, 2, 3, \ldots, n$, ta có

$$\cos k\alpha\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}\left[\sin\frac{(2k + 1)\alpha}{2} - \sin\frac{(2k - 1)\alpha}{2}\right]$$

nên

$$T\sin\frac{\alpha}{2}=\sin\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}\left[\left(\sin\frac{3\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\right)+\left(\sin\frac{5\alpha}{2}-\sin\frac{3\alpha}{2}\right)+\ldots+\right.$$

$$\left.+\left(\sin\frac{(2n+1)\alpha}{2}-\sin\frac{(2n-1)\alpha}{2}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(\sin\frac{(2n+1)\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\right)\right]=\cos\frac{n\alpha}{2}\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}.$$

**6.58.** a) Ta có

$$\sin\frac{2\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7}=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{3\pi}{7}\right),$$

$$\sin\frac{4\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7}=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{3\pi}{7}-\cos\frac{5\pi}{7}\right),$$

$$\sin\frac{6\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7}=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{5\pi}{7}-\cos\pi\right).$$

Từ đó

$$\left(\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{4\pi}{7}+\sin\frac{6\pi}{7}\right)\sin\frac{\pi}{7}=\frac{1}{2}\left(1+\cos\frac{\pi}{7}\right)=\cos^2\frac{\pi}{14}.$$

Do $\sin\frac{\pi}{7}=2\sin\frac{\pi}{14}\cos\frac{\pi}{14}$. ta suy ra

$$\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{4\pi}{7}+\sin\frac{6\pi}{7}=\frac{1}{2}\cot\frac{\pi}{14}.$$

b) Với $k = 1, 2, 3, 4, 5$ ta có

$$\cos\frac{(2k-1)\pi}{11}\sin\frac{\pi}{11}=\frac{1}{2}\left[\sin\frac{2k\pi}{11}-\sin\frac{(2k-2)\pi}{11}\right],$$

nên nếu gọi $B$ là vế trái của đẳng thức ở câu b) thì

$$B\sin\frac{\pi}{11}=\frac{1}{2}\left[\left(\sin\frac{2\pi}{11}-\sin 0\right)+\left(\sin\frac{4\pi}{11}-\sin\frac{2\pi}{11}\right)+\ldots+\left(\sin\frac{10\pi}{11}-\sin\frac{8\pi}{11}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\sin\frac{10\pi}{11}=\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{11}$$

Từ đó $B=\frac{1}{2}$

c) Với $k = 1, 2, 3, 4, 5$ ta có

$\cos\frac{2k\pi}{11}\sin\frac{\pi}{11} = \frac{1}{2}\left[\sin\frac{(2k+1)\pi}{11} - \sin\frac{(2k-1)\pi}{11}\right]$ nên gọi $C$ là vế trái của đẳng thức câu c) thì

$$C\sin\frac{\pi}{11} = \frac{1}{2}\left[\left(\sin\frac{3\pi}{11} - \sin\frac{\pi}{11}\right) + \left(\sin\frac{5\pi}{11} - \sin\frac{3\pi}{11}\right) + \ldots + \left(\sin\pi - \sin\frac{9\pi}{11}\right)\right]$$

$$= -\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{11}.$$

Từ đó $C = -\frac{1}{2}$.

d) Theo câu a) bài 6.57, gọi $D$ là vế trái của đẳng thức câu d) thì (ở đây $n = 10, \alpha = \frac{\pi}{11}$)

$$D\sin\frac{\pi}{22} = \sin\frac{10\pi}{22}\sin\frac{\pi}{2} = \sin\frac{10\pi}{22} = \cos\frac{\pi}{22}$$

Từ đó $D = \cot\frac{\pi}{22}$

**6.59.** Cho $\sin\alpha - \cos\alpha = m$ ta có

a) $\sin\alpha\cos\alpha = -\frac{1}{2}\left[(\sin\alpha - \cos\alpha)^2 - 1\right] = \frac{1-m^2}{2}$.

b) $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = 1 + 2\sin\alpha\cos\alpha = 1 + 1 - m^2 = 2 - m^2$

Từ đó $|\sin\alpha + \cos\alpha| = \sqrt{2-m^2}$

c) $\sin^3\alpha - \cos^3\alpha = (\sin\alpha - \cos\alpha)^3 - 3\sin\alpha\cos\alpha(\sin\alpha - \cos\alpha)$

$$= m^3 + 3\left(\frac{1-m^2}{2}\right)m = \frac{m(3-m^2)}{2}.$$

d) $\sin^6\alpha + \cos^6\alpha = (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^3 - 3\sin^2\alpha\cos^2\alpha(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)$

$$= 1 - 3\left(\frac{1-m^2}{2}\right)^2 = \frac{-3m^4 + 6m^2 + 1}{4}$$

(*Chú ý*. Cũng dễ dàng suy ra các kết quả này từ kết quả của bài tập 6.30 bằng cách đặt $\alpha = \pi - \alpha'$).

**6.60.** a) Vì $\sin 75^{\circ} = \cos 15^{\circ}$, $\sin 55^{\circ} = \cos 35^{\circ}$ nên

$\sin^2 15^{\circ} + \sin^2 35^{\circ} + \sin^2 55^{\circ} + \sin^2 75^{\circ} = 2.$

b) Vì $\sin\frac{7\pi}{8} = \sin\left(\frac{3\pi}{8} + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{3\pi}{8}$ ; $\sin\frac{5\pi}{8} = \sin\left(\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{8}$

nên $\sin^2\frac{\pi}{8} + \sin^2\frac{3\pi}{8} + \sin^2\frac{5\pi}{8} + \sin^2\frac{7\pi}{8} = 2$.

c) Tương tự

$$\cos\frac{11\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{5\pi}{12}\right) = -\sin\frac{5\pi}{12}.$$

$$\cos\frac{9\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{12}\right) = -\sin\frac{3\pi}{12}.$$

$$\cos\frac{7\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{12}\right) = -\sin\frac{\pi}{12}$$

nên ta có :

$$\cos^2\frac{\pi}{12} + \cos^2\frac{3\pi}{12} + \cos^2\frac{5\pi}{12} + \cos^2\frac{7\pi}{12} + \cos^2\frac{9\pi}{12} + \cos^2\frac{11\pi}{12} = 3.$$

**6.61.** Ta có $\tan\alpha + \tan\beta = -\frac{b}{a}$; $\tan\alpha\tan\beta = \frac{c}{a}$.

- Nếu $\cos(\alpha + \beta) \neq 0$ thì vế trái của đẳng thức đã cho là

$a\sin^2(\alpha + \beta) + b\sin(\alpha + \beta)\cos(\alpha + \beta) + c\cos^2(\alpha + \beta)$

$= \cos^2(\alpha + \beta)[a\tan^2(\alpha + \beta) + b\tan(\alpha + \beta) + c]$

$$= \frac{1}{1 + \tan^2(\alpha + \beta)}\left[a\tan^2(\alpha + \beta) + b\tan(\alpha + \beta) + c\right]. \qquad (*)$$

Nhưng ta có $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} = \frac{b}{c - a}$

(để ý rằng $\cos(\alpha + \beta) \neq 0 \Leftrightarrow c \neq a$) nên thay giá trị của $\tan(\alpha + \beta)$ vào biểu thức (*), sau khi đơn giản ta được biểu thức đó bằng $c$.

- Nếu $\cos(\alpha + \beta) = 0$ ($\Leftrightarrow \tan\alpha\tan\beta = 1 \Leftrightarrow a = c$) thì $\sin^2(\alpha + \beta) = 1$, nên vế trái của đẳng thức đã cho bằng $a\sin^2(\alpha + \beta) = a = c$.

**6.62.** Đặt $u = \frac{1}{2}(\tan\alpha + \cot\alpha)$, $v = \frac{1}{2}(\tan\alpha - \cot\alpha)$ thì $u + v = \tan\alpha$, $u - v = \cot\alpha$. Khi đó ta có

$$\sin(\tan\alpha) + \sin(\cot\alpha) = \sin(u + v) + \sin(u - v) = 2\sin u\cos v$$

$$= 2\sin\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)\right].\cos\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)\right]$$

$$= 2\sin\left(\frac{1}{2\sin\alpha\cos\alpha}\right).\cos\left(\frac{\sin^2\alpha - \cos^2 a}{2\sin\alpha\cos\alpha}\right)$$

$$= 2\sin\left(\frac{1}{\sin 2\alpha}\right).\cos\left(\cot 2\alpha\right).$$

**6.63.** Ta có

$$\cos(\alpha - \beta) = \frac{BK}{BE} = \frac{BH}{BE} + \frac{HK}{BE} = \frac{BH}{BA}\frac{BA}{BE} + \frac{EJ}{BE}$$ (*HKEJ* là hình chữ nhật)

$$= \frac{BH}{BA}\cdot\frac{BA}{BE} + \frac{EJ}{EA}\cdot\frac{EA}{BE} = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.$$

**6.64.** Ta có $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ ;

$$\cos\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1 + \cos\frac{\pi}{4}}{2}} = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{2}}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}}$$

$$\cos\frac{\pi}{16} = \sqrt{\frac{1 + \cos\frac{\pi}{8}}{2}} = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}\ ;$$

$$\cos\frac{\pi}{32} = \sqrt{\frac{1 + \cos\frac{\pi}{16}}{2}} = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}$$

**6.65.** a) Ta có :

$$\sin\frac{2\pi}{9}\cos\frac{2\pi}{9}\cos\frac{4\pi}{9}\cos\frac{8\pi}{9}$$

$$= \frac{1}{2}\sin\frac{4\pi}{9}\cos\frac{4\pi}{9}\cos\frac{8\pi}{9} = \frac{1}{4}\sin\frac{8\pi}{9}\cos\frac{8\pi}{9}$$

$$= \frac{1}{8}\sin\frac{16\pi}{9} = \frac{1}{8}\sin\left(2\pi - \frac{2\pi}{9}\right) = -\frac{1}{8}\sin\frac{2\pi}{9}.$$

Từ đó : $\cos\frac{2\pi}{9}\cos\frac{4\pi}{9}\cos\frac{8\pi}{9} = -\frac{1}{8}$.

b) Ta có $\cos\frac{2\pi}{9} + \cos\frac{8\pi}{9} = 2\cos\frac{5\pi}{9}\cos\frac{\pi}{3} = \cos\frac{5\pi}{9}$

$$= \cos\left(\pi - \frac{4\pi}{9}\right) = -\cos\frac{4\pi}{9},$$

từ đó $\cos\frac{2\pi}{9} + \cos\frac{4\pi}{9} + \cos\frac{8\pi}{9} = 0.$

c) Do $\cos\frac{2\pi}{9} = 2\cos^2\frac{\pi}{9} - 1 = 2\cos^2\frac{8\pi}{9} - 1,$

$$\cos\frac{4\pi}{9} = 2\cos^2\frac{2\pi}{9} - 1$$

$$\cos\frac{8\pi}{9} = 2\cos^2\frac{4\pi}{9} - 1,$$

nên từ b) suy ra

$$\cos^2\frac{2\pi}{9} + \cos^2\frac{4\pi}{9} + \cos^2\frac{8\pi}{9} = \frac{3}{2}.$$

d) Với mọi số $A$, $B$, $C$ ta có :

$AB + BC + CA = \frac{1}{2}\left[(A+B+C)^2 - A^2 - B^2 - C^2\right]$ nên

$$\cos\frac{2\pi}{9}\cos\frac{4\pi}{9} + \cos\frac{4\pi}{9}\cos\frac{8\pi}{9} + \cos\frac{8\pi}{9}\cos\frac{2\pi}{9}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(\cos\frac{2\pi}{9} + \cos\frac{4\pi}{9} + \cos\frac{8\pi}{9}\right)^2 - \left(\cos^2\frac{2\pi}{9} + \cos^2\frac{4\pi}{9} + \cos^2\frac{8\pi}{9}\right)\right]$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2} = -\frac{3}{4}.$$

e) Ta có $\left(X - \cos\frac{2\pi}{9}\right)\left(X - \cos\frac{4\pi}{9}\right)\left(X - \cos\frac{8\pi}{9}\right)$

$$= X^3 - \left(\cos\frac{2\pi}{9} + \cos\frac{4\pi}{9} + \cos\frac{8\pi}{9}\right)X^2 +$$

$$+\left(\cos\frac{2\pi}{9}\cos\frac{4\pi}{9} + \cos\frac{4\pi}{9}\cos\frac{8\pi}{9} + \cos\frac{8\pi}{9}\cos\frac{2\pi}{9}\right)X$$

$$-\cos\frac{2\pi}{9}\cos\frac{4\pi}{9}\cos\frac{8\pi}{9} = X^3 - \frac{3}{4}X + \frac{1}{8}.$$

Từ đó $\left(1-\cos\frac{2\pi}{9}\right)\left(1-\cos\frac{4\pi}{9}\right)\left(1-\cos\frac{8\pi}{9}\right)=\frac{3}{8}$, tức là

$$2\sin^2\frac{\pi}{9}.2\sin^2\frac{2\pi}{9}.2\sin^2\frac{4\pi}{9}=\frac{3}{8},$$

suy ra

$$\sin\frac{\pi}{9}.\sin\frac{2\pi}{9}.\sin\frac{4\pi}{9}=\frac{\sqrt{3}}{8}.$$

Đẳng thức này lại cho ta $\sin\frac{5\pi}{9}\sin\frac{7\pi}{9}\sin\frac{8\pi}{9}=\frac{\sqrt{3}}{8}$.

f) Từ e) ta suy ra :

$$\sin\frac{\pi}{9}\sin\frac{2\pi}{9}\sin\frac{3\pi}{9}\sin\frac{4\pi}{9}\sin\frac{5\pi}{9}\sin\frac{6\pi}{9}\sin\frac{7\pi}{9}\sin\frac{8\pi}{9}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{8}.\frac{\sqrt{3}}{8}\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{9}{256}.$$

**6.66.** Ta có

$$\cos^2(\gamma-\alpha)+\sin^2(\gamma-\beta)=\frac{1+\cos2(\gamma-\alpha)}{2}+\frac{1-\cos2(\gamma-\beta)}{2}$$

$$=1+\frac{1}{2}[\cos2(\gamma-\alpha)-\cos2(\gamma-\beta)]=1+\sin(2\gamma-\alpha-\beta)\sin(\alpha-\beta).$$

Từ đó

$$\cos^2(\gamma-\alpha)+\sin^2(\gamma-\beta)-2\cos(\gamma-\alpha)\sin(\gamma-\beta)\sin(\alpha-\beta)$$

$$=1+\sin(2\gamma-\alpha-\beta)\sin(\alpha-\beta)-2\cos(\gamma-\alpha)\sin(\gamma-\beta)\sin(\alpha-\beta)$$

$$=1+\sin(\alpha-\beta)[\sin(2\gamma-\alpha-\beta)-2\cos(\gamma-\alpha)\sin(\gamma-\beta)]$$

$$=1+\sin(\alpha-\beta)[\sin(2\gamma-\alpha-\beta)-\sin(2\gamma-\alpha-\beta)-\sin(\alpha-\beta)]$$

$$=1-\sin^2(\alpha-\beta)=\cos^2(\alpha-\beta).$$

**6.67.** $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha=(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$

$$=1-\frac{1}{2}\sin^2 2\alpha.$$

Vậy biểu thức đã cho lấy giá trị bé nhất là $\frac{1}{2}$ khi $\sin^2 2\alpha=1$.

**6.68.** $\sin^6\alpha + \cos^6\alpha = (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^3 - 3\sin^2\alpha\cos^2\alpha(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)$

$$= 1 - 3\sin^2\alpha\cos^2\alpha = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2\alpha.$$

Vậy biểu thức đã cho lấy giá trị nhỏ nhất là $\frac{1}{4}$ khi $\sin^2 2\alpha = 1$.

**6.69.** Phương án (B).

**6.70.** Phương án (C). (Để ý rằng $\cos\frac{4\pi}{5} = -\cos\frac{\pi}{5}$).

**6.71.** Phương án (C).

**6.72.** Phương án (B).

**6.73.** Phương án (A). (Để ý rằng $\sin^4\alpha \le \sin^2\alpha$, $\cos^4\alpha \le \cos^2\alpha$).

**6.74.** Phương án (B). (Để ý rằng $\sin^4\alpha \le \sin^2\alpha$, $\cos^7\alpha \le \cos^2\alpha$).

**6.75.** Phương án (B). (Để ý rằng $-\sin^2\alpha \le \sin^4\alpha$, $-\cos^2\alpha \le \cos^7\alpha$).

**6.76.** Phương án (C). (Để ý rằng $\sin^{12}\alpha \le \sin^2\alpha$, $\cos^{12}\alpha \le \cos^2\alpha$).

**6.77.** Phương án (A). (Để ý rằng $\frac{4}{\cos^6\alpha} - 3\tan^6\alpha = 4(1 + \tan^2\alpha)^3 - 3\tan^6\alpha$ chỉ chứa những luỹ thừa bậc chẵn của $\tan\alpha$ với hệ số không âm nên nó đạt giá trị nhỏ nhất khi $\tan\alpha = 0$, $|\cos\alpha| = 1$).

**6.78.** Phương án (C). (Để ý rằng các điểm của đường tròn lượng giác xác định bởi các số $\alpha$, $\alpha + \frac{\pi}{5}$. $\alpha + \frac{2\pi}{5}$. ..., $\alpha + \frac{9\pi}{5}$ là các đỉnh của một thập giác đều nội tiếp đường tròn đó hoặc để ý rằng

$\cos\alpha = -\cos\left(\alpha + \frac{5\pi}{5}\right)$, $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{5}\right) = -\cos\left(\alpha + \frac{6\pi}{5}\right)$, ...).

# BÀI TẬP ÔN TẬP CUỐI NĂM

## A. ĐỀ BÀI

**1.** Cho $A = (0\,;\,4)$, $B = \{\, x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 32\}$,

$$C = \{x \in \mathbb{R} \mid (x-2)^2 > 3\},\ D = [\sqrt{6}\,;\,+\infty).$$

Tìm $(A \cap B) \cup (C \cap D)$.

**2.** Cho $x$ là số vô tỉ và $a, b, c, d$ là các số hữu tỉ sao cho $ad - bc \neq 0$. Chứng minh rằng số $\dfrac{ax+b}{cx+d}$ là số vô tỉ.

**3.** Cho mệnh đề chứa biến $P(n)$ : "Nếu tổng các chữ số của số nguyên dương $n$ chia hết cho 6 thì $n$ chia hết cho 6". $P(n)$ là mệnh đề **sai** khi $n$ bằng

(A) 30 ; (B) 33 ; (C) 40 ; (D) 42.

**4.** a) Sử dụng máy tính bỏ túi để tính $\sqrt{2006}$, máy tính cho kết quả là 44,78839135. Hãy cho biết độ chính xác $d$ của kết quả này.

b) Khi viết $a \approx 15{,}7 \pm 0{,}3$, ta hiểu số đúng $a$ nằm trong khoảng nào ?

**5.** Cho hàm số $f(x) = -x + |x+2| - |x-2|$.

a) Hãy viết hàm số dưới dạng hàm số bậc nhất trên từng khoảng và không chứa dấu giá trị tuyệt đối. (*Gợi ý.* Xét hàm số trên mỗi khoảng $(-\infty\,;\,-2)$, $[-2\,;\,2)$ và $[2\,;\,+\infty)$).

b) Chứng minh rằng $y = f(x)$ là hàm số lẻ.

c) Vẽ đồ thị của hàm số $y = f(x)$, lập bảng biến thiên và nêu sự biến thiên của nó trên mỗi khoảng kể trên.

d) Sử dụng đồ thị, hãy tìm các khoảng trên đó hàm số có giá trị dương.

**6.** Cho hàm số $y = x^2 - 4x + 1$.

a) Khảo sát và vẽ đồ thị $(P)$ của hàm số đã cho.

b) Gọi $(d)$ là đường thẳng song song với đường phân giác của góc phần tư $(I)$ và đi qua điểm $M(0\,;\,m)$. Xác định biểu thức của hàm số có đồ thị $(d)$.

c) Tìm hoành độ các giao điểm $A$ và $B$ (nếu có) của $(d)$ và $(P)$, và toạ độ trung điểm của đoạn thẳng $AB$ (khi $A$ và $B$ phân biệt).

**7.** Giải và biện luận các phương trình sau theo tham số $m$ :

a) $m^2x - 3m^2 = 9(x + m)$ ;

b) $m(x + 6) = x + 2m^2 + 4$ ;

c) $|mx + x - 1| - |x + 3| = 0$ ;

d) $|mx + 1| = |2x + m - 1|$ ;

e) $\dfrac{x + a}{a - x} + \dfrac{x - a}{a + x} = \dfrac{a}{a^2 - x^2}$.

**8.** Giải các hệ phương trình sau :

a) $\begin{cases} 0{,}1x - 0{,}3y = 0{,}7 \\ x - 3y = 7\,; \end{cases}$

b) $\begin{cases} \sqrt{5}x - \sqrt{3}y = \sqrt{2} \\ 6x + \sqrt{2}y = \sqrt{5}. \end{cases}$

**9.** Cho hệ phương trình :

$$\text{(I)}\ \begin{cases} (a + 4)x + ay = 2(a + 1) \\ (a + 2)x + 2ay = 1. \end{cases}$$

a) Giải và biện luận hệ (I) theo tham số $a$.

b) Khi hệ (I) có nghiệm duy nhất $(x\,;\,y)$, hãy tìm hệ thức giữa $x$ và $y$ không phụ thuộc vào $a$.

**10.** Giải các phương trình :

a) $\dfrac{13}{2x^2 + x - 21} + \dfrac{1}{2x + 7} = \dfrac{6}{x^2 - 9}$ ;

b) $\dfrac{x + 1}{x - 1} + \dfrac{x - 2}{x + 2} + \dfrac{x - 3}{x + 3} + \dfrac{x + 4}{x - 4} = 4.$

**11.** Tìm tất cả các giá trị của tham số $a$ để phương trình :

$$(a + 2)\,x^2 + 2(a + 1)x + a - 2 = 0.$$

a) Có hai nghiệm khác nhau.

b) Có ít nhất một nghiệm.

c) Có hai nghiệm bằng nhau.

**12.** Dùng đồ thị để biện luận số nghiệm của phương trình :

$$x^2 - 6x + 3 + m = 0.$$

**13.** Giả sử $x_1$ và $x_2$ là các nghiệm của phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ trong đó $ac \neq 0$. Hãy biểu diễn các biểu thức sau đây qua các hệ số $a$, $b$, $c$ :

a) $x_2x_1^2 + x_1x_2^2$ ; b) $x_1 - x_2$ ; c) $x_1^2 - x_2^2$.

**14.** Giải các hệ phương trình sau :

a) $\begin{cases} x + 4y = 9 \\ x^2 + y^2 + x - 2y = 2 ; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4x^2 + y^2 - 2xy = 7 \\ (2x - y)y = y ; \end{cases}$

c) $\begin{cases} 5(x + y) + 2xy = -19 \\ 3xy + x + y = -35. \end{cases}$

**15.** So sánh các số sau đây :

a) $\sqrt{2003} + \sqrt{2004}$ và $\sqrt{2000} + \sqrt{2007}$ ;

b) $\sqrt{n+3} + \sqrt{n+4}$ và $\sqrt{n} + \sqrt{n+7}$ (với $n \geq 0$) ;

c) $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ và $\sqrt{a-c} + \sqrt{b+c}$, với $a > b > c > 0$.

**16.** Chứng minh các bất đẳng thức sau :

a) $\dfrac{a^2 + 3}{\sqrt{a^2 + 2}} > 2$ ; b) $\dfrac{a^3}{a^6 + 1} \leq \dfrac{1}{2}$.

**17.** a) Chứng minh rằng đối với ba số $a$, $b$, $c$ tuỳ ý, ta có

$$|a| + |b| + |c| \geq |a + b + c|.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào ?

b) *Áp dụng*. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$f(x) = |x + 2| + |x + 1| + |2x - 5|.$$

**18.** Cho ba số dương $a$, $b$, $c$. Chứng minh rằng :

a) $ac + \dfrac{b}{c} \geq 2\sqrt{ab}$ ; b) $\dfrac{a}{\sqrt{b}} + \dfrac{b}{\sqrt{a}} \geq 2\sqrt[4]{ab}$.

Trong mỗi bất đẳng thức trên, dấu bằng xảy ra khi nào ?

**19.** Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x) = x + \dfrac{1}{x-2}$ với $x > 2$ ;

**20.** a) Chứng minh rằng với mọi số thực $a, b, c, x, y, z$ $(xyz \neq 0)$, luôn có

$$(ax + by + cz)^2 \leq (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2).$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $\dfrac{a}{x} = \dfrac{b}{y} = \dfrac{c}{z}$.

b) *Áp dụng*. Cho $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$. Chứng minh rằng $|x + 2y + 3z| \leq 6$.

**21.** Giải các hệ bất phương trình

a) $\begin{cases} x + 1 \leq 2x - 3 \\ \dfrac{5-3x}{4} \geq x + 3 \end{cases}$ ;

b) $\begin{cases} 2x + 1 < x + 4 \\ x + 1 < \dfrac{x+20}{5} \\ x\sqrt{x+1} > 0. \end{cases}$

**22.** Giải và biện luận hệ bất phương trình :

$$\begin{cases} 1 + mx > 0 \\ x - 2 \leq 0. \end{cases}$$

**23.** Giải các bất phương trình :

a) $\dfrac{1-x}{(2x-1)(x-2)} < 0$ ;

b) $\dfrac{x+1}{2x+1} \geq \dfrac{x-1}{3x+1}$.

**24.** Giải các bất phương trình :

a) $|x + 1| + 3|x + 2| > x + 7$ ;

b) $\left|\dfrac{-5}{x+2}\right| \leq \left|\dfrac{10}{x-1}\right|$.

**25.** Xác định miền nghiệm của các hệ bất phương trình sau :

a) $\begin{cases} y \leq 2 \\ x \geq -1 \\ x - y \leq 1 \\ x + y \leq 2 \end{cases}$ ;

b) $\begin{cases} 2y - x > 2 \\ 4x + 3y > 12 \\ x + 3y < 3. \end{cases}$

**26.** Tìm các giá trị của $m$ để mỗi biểu thức sau đây luôn dương :

a) $(m^2 + 1)x^2 + (m - 1)x + 3$ ;

b) $(\sqrt{2} - m)x^2 + (m - \sqrt{2})x + 2m + 3\sqrt{2}$

**27.** Tìm các giá trị của $m$ để mỗi biểu thức sau đây luôn âm :

a) $-4x^2 + (4m + \sqrt{2})x - m^2 - \sqrt{2}m + 1$ ;

b) $(5m + 1)x^2 - (5m + 1)x + 4m + 3$.

**28.** Giải các bất phương trình sau :

a) $\dfrac{8 + 4x}{4x + x^2} \leq \dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{4 + x}$ ; b) $\dfrac{1}{x^2 - 4} - \dfrac{1}{(x + 2)^2} \geq \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{2x}$.

**29.** Giải các hệ bất phương trình sau :

a) $\begin{cases} x^2 - 14x + 45 < 0 \\ x^2 - 11x + 30 > 0 \end{cases}$ ; b) $\begin{cases} x^2 - x - 6 \leq 0 \\ x^3 + x^2 - x - 1 \geq 0. \end{cases}$

**30.** Tìm tất cả các giá trị của tham số $m$ để các bất phương trình sau vô nghiệm :

a) $3x^2 + mx + m + 2 < 0$ ; b) $(3 - m)x^2 - 2(2m - 5)x - 2m + 5 > 0$.

**31.** Tìm các giá trị của $m$ để phương trình $x^4 - 2mx^2 + m^2 - 1 = 0$ vô nghiệm.

**32.** Tìm các giá trị của $m$ để phương trình $(m - 1)x^2 - (m - 5)x + m - 1 = 0$, có hai nghiệm phân biệt lớn hơn $-1$.

**33.** Giải các phương trình :

a) $x^4 - 18x^2 + 81 = 0$ ; b) $4x^4 - 37x^2 + 9 = 0$.

**34.** Giải các bất phương trình :

a) $\sqrt{-x^2 + 4x - 3} < x - 2$ ; b) $\sqrt{2x + 5} > x + 1$.

**35.** Giải các bất phương trình

a) $2x^2 + \sqrt{2x^2 - 8} \leq 20$ ; b) $x^2 - 3x - \sqrt{x^2 - 3x + 5} > 1$.

**36.** Một nghiên cứu về tuổi của những phụ nữ Mĩ sinh con lần đầu cho ta số liệu sau :

| Tuổi của mẹ | Tần số |
|---|---|
| [15 ;19] | 312 448 |
| [20 ; 24] | 350 905 |
| [25 ; 29] | 196 365 |
| [30 ; 34] | 94 874 |
| [35 ; 39] | 34 408 |
| | N = 989 000 |

a) Dấu hiệu là gì ? Đơn vị điều tra là gì ?

b) Tìm tuổi trung bình các bà mẹ ở Mĩ sinh con lần đầu.

c) Lập bảng phân bố tần suất.

d) Vẽ biểu đồ tần suất hình quạt.

e) Vẽ biểu đồ tần suất hình cột.

**37.** Tìm tất cả các mẫu số liệu kích thước 5 có các tính chất sau :

– Các số liệu trong mẫu là các số nguyên dương.

– Số trung bình là 12, số trung vị và mốt đều bằng 8.

– Biên độ (hiệu giữa giá trị lớn nhất và giá trị bé nhất của mẫu) bằng 18.

**38.** Chứng minh rằng nếu $\sin(\alpha - \beta) = \frac{1}{3}\sin\beta$, thì $\tan(\alpha - \beta) = \frac{\sin\alpha}{3 + \cos\alpha}$.

**39.** Chứng minh rằng, nếu $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ thì

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = 1.$$

**40.** Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$4\cdot\frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha} - \frac{2}{\cos^2\dfrac{\alpha}{2}} + 3\text{, (giả sử } \cos\frac{\alpha}{2} \neq 0\text{).}$$

**41.** a) Với các giá trị nào của $\alpha$ thì biểu thức sau đây có nghĩa ?

$$\frac{\sin\alpha + \sin3\alpha + \sin5\alpha + \sin7\alpha}{\cos\alpha + \cos3\alpha + \cos5\alpha + \cos7\alpha}.$$

b) Chứng minh rằng với các giá trị đó của $\alpha$ thì biểu thức đã cho bằng $\tan4\alpha$.

**42.** Chứng minh rằng với mọi $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ ta có :

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta - \cos^2\gamma - \cos^2(\alpha + \beta + \gamma)$$

$$= 2\cos(\alpha + \beta)\sin(\beta + \gamma)\sin(\gamma + \alpha).$$

## B. ĐÁP SỐ – HƯỚNG DẪN – LỜI GIẢI

**1.** $A = (0 ; 4)$ ; $B = (-4\sqrt{2} ; 4\sqrt{2})$. Vậy $A \cap B = (0 ; 4)$

$C = (-\infty ; 2 - \sqrt{3}) \cup (2 + \sqrt{3} ; +\infty)$ ; $D = [\sqrt{6} ; +\infty)$.

Vậy $C \cap D = (2 + \sqrt{3}\ ; +\infty)$.

Vậy $(A \cap B) \cup (C \cap D) = (0\ ; +\infty)$.

**2.** Chứng minh bằng phản chứng. Giả sử $\dfrac{ax + b}{cx + d} = r$ là số hữu tỉ. Khi đó $ax + b = rd + rcx$. Vậy $x(rc - a) = b - rd$. Nếu $rc - a \neq 0$ thì $x = \dfrac{b - rd}{rc - a}$ là số hữu tỉ, trái với giả thiết. Vậy $rc = a$ do đó $rd = b$. Nhưng khi đó $ad - bc = rcd - rcd = 0$. Điều này trái với giả thiết.

**3.** Giá trị $n$ để $P(n)$ sai khi tổng các chữ số của $n$ chia hết cho 6 nhưng $n$ không chia hết cho 6. Chỉ có duy nhất giá trị $n = 33$ thoả mãn điều này. Vậy câu trả lời là $B$).

**4.** a) $d = \dfrac{10^{-8}}{2}$.

b) $a \in [15{,}4\ ; 16]$

**5.** a) $f(x) = \begin{cases} -x - 4 & \text{khi } x < -2 \\ x & \text{khi } -2 \leq x < 2 \\ -x + 4 & \text{khi } x \geq 2. \end{cases}$

b) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$. Với mọi $x$, ta có :

*Cách 1.* (sử dụng tính chất $|-a| = |a|$) :

$$f(-x) = -(-x) + |(-x) + 2| - |(-x) - 2| = x + |x - 2| - |x + 2|$$

$$= -(-x + |x + 2| - |x - 2|) = -f(x).$$

*Cách 2.* (sử dụng kết quả câu a) :

– Nếu $x < -2$ thì $-x > 2$, nên $f(-x) = -(-x) + 4 = -(-x - 4) = -f(x)$.

– Nếu $-2 \leq x < 2$ thì $-2 < -x \leq 2$, nên $f(-x) = -x = -f(x)$.

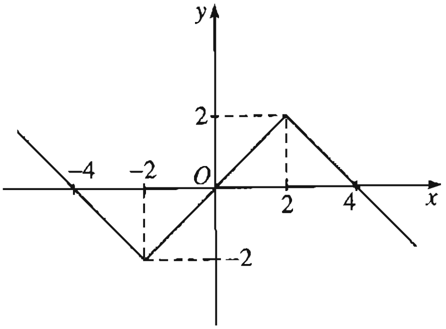
– Nếu $x \geq 2$ thì $-x \leq -2$, nên $f(-x) = -(-x) - 4 = -(-x + 4) = -f(x)$.

Vậy trong mọi trường hợp ta đều có $f(-x) = -f(x)$, chứng tỏ $f(x)$ là hàm số lẻ.

c) Đồ thị (h. 1).

Bảng biến thiên :

| $x$ | $-\infty$ |  | $-2$ |  | $2$ |  | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $+\infty$ | ↘ | $-2$ | ↗ | $2$ | ↘ | $-\infty$ |



*Hình 1*

d) $(-\infty ; -4)$ và $(0 ; 4)$.

**6.** a) Học sinh tự giải.

b) Hàm số cần tìm là $y = x + m$.

c) Hoành độ giao điểm của $(d)$ và $(P)$ là nghiệm của phương trình

$$x^2 - 4x + 1 = x + m,$$

hay $$x^2 - 5x + 1 - m = 0. \qquad (1)$$

Phương trình (1) có biệt thức $\Delta = 25 - 4(1 - m) = 21 + 4m$.

Do đó, nếu $21 + 4m \geq 0$ thì nó có hai nghiệm

$$x_1 = \frac{5 - \sqrt{21 + 4m}}{2} \text{ và } x_2 = \frac{5 + \sqrt{21 + 4m}}{2}.$$

Đó cũng là hoành độ các giao điểm $A$ và $B$ của $(d)$ và $(P)$.

Toạ độ trung điểm của đoạn thẳng $AB$ (khi $\Delta = 21 + 4m > 0$) là điểm có tọa độ $(x_0 ; y_0)$, trong đó :

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{5}{2} ;$$

$$y_0 = x_0 + m = \frac{5}{2} + m.$$

**7.** a) Ta có $m^2x - 3m^2 = 9(x + m) \Leftrightarrow (m^2 - 9)x = 3m(m + 3)$.

– Nếu $m \neq \pm 3$ thì phương trình có nghiệm duy nhất $x = \dfrac{3m}{m - 3}$.

– Nếu $m = -3$ thì phương trình có dạng $0.x = 0$, nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$. Tập nghiệm $S = \mathbb{R}$.

– Nếu $m = 3$ thì phương trình có dạng $0.x = 36$ (vô lí). Tập nghiệm $S = \varnothing$.

b) Biến đổi phương trình về dạng $(m-1)x = 2(m-1)(m-2)$.

Phương trình có nghiệm duy nhất $x = 2(m-2)$ khi $m \neq 1$ và nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$ khi $m = 1$.

c) $|mx + x - 1| = |x + 3|$ (1)

$\Leftrightarrow mx + x - 1 = x + 3$ hoặc $mx + x - 1 = -x - 3$.

i) $mx + x - 1 = x + 3 \Leftrightarrow mx = 4$. (2)

– Khi $m = 0$, (2) trở thành $0.x = 4$ nên phương trình vô nghiệm

– Khi $m \neq 0$, (2) có một nghiệm $x = \dfrac{4}{m}\cdot$

ii) $mx + x - 1 = -x - 3 \Leftrightarrow (m+2)x = -2$. (3)

– Khi $m = -2$ ; (3) trở thành $0.x = -2$ nên phương trình vô nghiệm.

– Khi $m \neq -2$ ; (3) có một nghiệm $x = \dfrac{-2}{m+2}\cdot$

*Kết luận.* Với $m = 0$, phương trình có nghiệm $x = -1$ ;

Với $m = -2$, phương trình có nghiệm $x = -2$ ;

Với $m \neq 0$, $m \neq -2$, phương trình có nghiệm $x = \dfrac{4}{m}$ và $x = -\dfrac{2}{m+2}$

d) Với $m = 2$, tập nghiệm $S = \mathbb{R}$.

Với $m = -2$ hoặc $m = -1$, phương trình có nghiệm $x = 1$ ;

Với $m \neq 2$, $m \neq -2$, $m \neq -1$, phương trình có nghiệm $x = 1$ và $x = \dfrac{-m}{m+2}\cdot$

e) Điều kiện của phương trình : $x \neq \pm$ a.

Ta đưa phương trình về dạng $4ax = a$. (1)

- Nếu $a = 0$ thì (1) có dạng $0.x = 0$, phương trình (1) nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Vậy phương trình đã cho nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}^*$

- Nếu $a \neq 0$ thì (1) có nghiệm $x = \frac{1}{4}\cdot$ Xét điều kiện $x \neq \pm a$, ta có $\frac{1}{4} = \pm a$ $\Leftrightarrow a = \pm\frac{1}{4}\cdot$ Vậy khi $a \neq 0$, $a \neq \pm\frac{1}{4}$ thì $x = \frac{1}{4}$ là nghiệm của phương trình đã cho.

*Kết luận* : Với $a = 0$, tập nghiệm của phương trình là $S = \mathbb{R}^*$ ;

Với $a = \frac{1}{4}$ hoặc $a = -\frac{1}{4}$, tập nghiệm của phương trình là $S = \varnothing$ ;

Với $a \neq 0$, $a \neq \pm\frac{1}{4}$, tập nghiệm $S = \left\{\frac{1}{4}\right\}$.

**8.** a) Hệ có vô số nghiệm $\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = \dfrac{x-7}{3}. \end{cases}$

b) Ta có $D = \sqrt{10} + 6\sqrt{3}$ ; $D_x = 2 + \sqrt{15}$ ; $D_y = 5 - 6\sqrt{2}$.

Hệ phương trình có nghiệm duy nhất

$$(x\ ;\ y) = \left(\frac{2+\sqrt{5}}{\sqrt{10}+6\sqrt{3}}\ ;\ \frac{5-6\sqrt{2}}{\sqrt{10}+6\sqrt{3}}\right).$$

**9.** a) Hệ có nghiệm duy nhất $(x\ ;\ y) = \left(\frac{4a+3}{a+6}\ ;\ \frac{-(2a+5)}{a+6}\right)$ nếu $a \neq 0$ và $a \neq -6$.

Hệ vô nghiệm nếu $a = -6$ ; Hệ có vô số nghiệm $\left(\frac{1}{2}\ ;\ y\right)$ với $y$ tuỳ ý nếu $a = 0$.

b) Khi $a \neq 0$ và $a \neq -6$, hệ có nghiệm duy nhất $(x\ ;\ y) = \left(\frac{4a+3}{a+6}\ ;\ \frac{-(2a+5)}{a+6}\right)$.

Do $x = \frac{4a+3}{a+6}$ nên $a = \frac{3-6x}{x-4}\cdot$ Do đó

$$y = \frac{-(2a+5)}{a+6} = \frac{-\left(2.\dfrac{3-6x}{x-4}+5\right)}{\dfrac{3-6x}{x-4}+6} = \frac{x+2}{3}.$$

Vậy khi hệ có nghiệm duy nhất $(x\,;\,y)$ thì $y = \dfrac{x+2}{3}$.

**10.** a) $x = -4$.

b) Ta có $\dfrac{x+1}{x-1} = 1 + \dfrac{2}{x-1}$, $\dfrac{x-2}{x+2} = 1 - \dfrac{4}{x+2}$,

$\dfrac{x-3}{x+3} = 1 - \dfrac{6}{x+3}$, $\dfrac{x+4}{x-4} = 1 + \dfrac{8}{x-4}$,

nên phương trình đã cho trở thành : $\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{2}{x+2} - \dfrac{3}{x+3} + \dfrac{4}{x-4} = 0$

hay $\dfrac{5x-8}{(x-1)(x-4)} = \dfrac{5x+12}{(x+2)(x+3)}$.

Từ đó phương trình đã cho tương đương với hệ

$$\begin{cases}(5x-8)(x+2)(x+3) = (5x+12)(x-1)(x-4)\\(x-1)(x+2)(x+3)(x-4) \neq 0\end{cases} \qquad (*)$$

Phương trình thứ nhất của hệ (*) được biến đổi thành phương trình

$x^2 + x - \dfrac{16}{5} = 0$ và có hai nghiệm $x_1 = \dfrac{1}{2}\left(-1 + \sqrt{\dfrac{69}{5}}\right)$ và $x_2 = \dfrac{1}{2}\left(-1 - \sqrt{\dfrac{69}{5}}\right)$.

Vì hai nghiệm này thoả mãn điều kiện thứ hai của hệ (*) nên chúng là nghiệm của phương trình đã cho.

**11.** a) Để phương trình có hai nghiệm phân biệt điều kiện cần và đủ là

$$\begin{cases}a+2 \neq 0\\\Delta' = (a+1)^2 - (a^2-4) > 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a \neq -2\\2a+5 > 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow a \in \left(-\frac{5}{2}\,;\,-2\right) \cup (-2;\,+\infty).$$

b) Xét các trường hợp sau :

- $a + 2 = 0 \Leftrightarrow a = -2$ khi đó phương trình trở thành

$$-2x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = -2.$$

- $a + 2 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq -2$. Để phương trình có ít nhất một nghiệm, điều kiện cần và đủ là :

$$\Delta' = (a+1)^2 - (a^2 - 4) \geq 0 \Leftrightarrow 2a + 5 \geq 0 \Leftrightarrow a \geq -\frac{5}{2}.$$

Vậy $a \in [-\frac{5}{2}; +\infty)$.

c) $a = -\frac{5}{2}$.

**12.** Xét hàm số $y = f(x) = x^2 - 6x + 3$. Đồ thị hàm số là một parabol quay bề lõm lên trên (h.2) và đỉnh parabol là điểm $P(3 ; -6)$

Do đó parabol có phương trình $y = x^2 - 6x + 3$ và đường thẳng có phương trình $y = -m$ :

+ Có một điểm chung duy nhất khi $m = 6$ ;

+ Có hai điểm chung phân biệt khi $m < 6$ ;

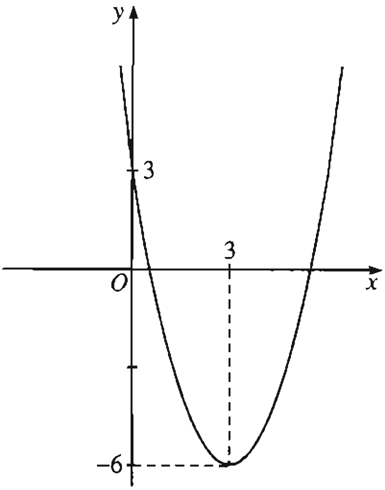
+ Không có điểm chung khi $m > 6$.

Suy ra phương trình $x^2 - 6x + 3 + m = 0$

+ Có nghiệm kép khi $m = 6$ ;

+ Có hai nghiệm phân biệt khi $m < 6$ ;

+ Vô nghiệm khi $m > 6$.



*Hình 2*

**13.** a) $x_2x_1^2 + x_1x_2^2 = x_1x_2(x_1 + x_2) = -\frac{bc}{a^2}$

b) Ta có $|x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2} = \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{a^2}}$.

Suy ra :

Nếu $x_1 - x_2 \geq 0$ thì $x_1 - x_2 = \sqrt{\dfrac{b^2 - 4ac}{a^2}}$.

Nếu $x_1 - x_2 \leq 0$ thì $x_1 - x_2 = -\sqrt{\dfrac{b^2 - 4ac}{a^2}}$.

c) $x_1^2 - x_2^2 = (x_1 - x_2)(x_1 + x_2)$. Sử dụng kết quả câu b) :

Nếu $x_1 - x_2 \geq 0$ thì $x_1^2 - x_2^2 = -\dfrac{b}{a}\sqrt{\dfrac{b^2 - 4ac}{a^2}}$.

Nếu $x_1 - x_2 \leq 0$ thì $x_1^2 - x_2^2 = \dfrac{b}{a}\sqrt{\dfrac{b^2 - 4ac}{a^2}}$.

**14.** a) $(1 : 2)$ và $\left(-\dfrac{23}{17} : \dfrac{44}{17}\right)$.

b) Nghiệm của hệ là: $\left(\dfrac{\sqrt{7}}{2} ; 0\right)$, $\left(-\dfrac{\sqrt{7}}{2} ; 0\right)$, $(-1 ; -3)$ và $\left(\dfrac{3}{2} ; 2\right)$.

*Gợi ý*. Từ phương trình thứ hai suy ra $y = 0$ hoặc $y = 2x-1$.

c) Nghiệm của hệ là $(-3 ; 4)$ và $(4 : -3)$.

**15.** a) $\sqrt{2003} + \sqrt{2004} > \sqrt{2000} + \sqrt{2007}$ ;

b) $\sqrt{n+3} + \sqrt{n+4} > \sqrt{n} + \sqrt{n+7}$ $(n \geq 0)$ ;

c) Nhận thấy $\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^2 = a + b + 2\sqrt{ab}$

$$\left(\sqrt{a-c} + \sqrt{b+c}\right)^2 = a + b + 2\sqrt{(a-c)(b+c)} ;$$

Do $(a - c)(b + c) = ab - c(a - b) - c^2 < ab$ (vì $a > b > c > 0$),

nên $2\sqrt{(a-c)(b+c)} < 2\sqrt{ab}$ Vì vậy $\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{a-c} + \sqrt{b+c}$

**16.** a) $\dfrac{a^2+3}{\sqrt{a^2+2}} > 2 \Leftrightarrow a^2+2+1 > 2\sqrt{a^2+2} \Leftrightarrow (\sqrt{a^2+2}-1)^2 > 0.$

Do $a^2 + 2 \geq 2$ với mọi $a$ nên $\sqrt{a^2+2} - 1 > 0$. Vì vậy bất đẳng thức cuối cùng đúng. Suy ra điều phải chứng minh.

b) $\dfrac{a^3}{a^6+1} \leq \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 2a^3 \leq a^6 + 1 \Leftrightarrow (a^3-1)^2 \geq 0$ (đúng).

(Dấu đẳng thức xảy ra khi $a = 1$).

**17.** a) $|a| + |b| + |c| = (|a| + |b|) + |c| \geq |a + b| + |c| \geq |a + b + c|$.

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} ab \geq 0 \\ (a+b)c \geq 0, \end{cases}$ tức $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$ hoặc $a \leq 0, b \leq 0, c \leq 0$.

b) $f(x) = |x + 2| + |x + 1| + |2x - 5| = |x + 2| + |x + 1| + |5 - 2x|$

$\geq |x + 2 + x + 1 + 5 - 2x| = 8.$

Đẳng thức xảy ra, chẳng hạn tại $x = 1$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ là 8.

**18.** a) Với $a > 0, b > 0, c > 0$ ta có

$$ac + \frac{b}{c} \geq 2\sqrt{ac.\frac{b}{c}} = 2\sqrt{ab}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $ac = \dfrac{b}{c}$ hay $b = ac^2$

b) $\dfrac{a}{\sqrt{b}} + \dfrac{b}{\sqrt{a}} \geq 2\sqrt{\dfrac{ab}{\sqrt{ab}}} = 2\sqrt[4]{ab}.$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b$.

**19.** b) $x + \dfrac{1}{x-2} = x - 2 + \dfrac{1}{x-2} + 2 \geq 2\sqrt{(x-2)\dfrac{1}{x-2}} + 2 = 4$ (vì $x - 2 > 0$).

Đẳng thức xảy ra khi $x = 3$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $g(x)$ là 4.

**20.** a) *Cách 1.* Từ đẳng thức

$$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)=$$

$$=(ax+by+cz)^2+(ay-bx)^2+(bz-cy)^2+(az-cx)^2$$

dễ dàng suy ra

$$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)\geq(ax+by+cz)^2$$

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases}ay=bx\\ bz=cy\\ az=cx\end{cases}$ tức là $\dfrac{a}{x}=\dfrac{b}{y}=\dfrac{c}{z}$.

*Cách 2*

$$(ax+by+cz)^2=a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2+2abxy+2acxz+2bcyz$$

$$\leq a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2+a^2y^2+b^2x^2+a^2z^2+c^2x^2+b^2z^2+c^2y^2$$

$$=(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2).$$

b) $(x+2y+3z)^2=(1.x+\sqrt{2}.\sqrt{2}y+\sqrt{3}.\sqrt{3}z)^2$

$$\leq(x^2+2y^2+3z^2)(1+2+3)=6.6=36.$$

Vì vậy $|x+2y+3z|\leq 6$.

**21.** a) $\begin{cases}x+1\leq 2x-3\\ \dfrac{5-3x}{4}>x+3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq 4\\ x\leq -1.\end{cases}$

Hệ vô nghiệm.

b) $0<x<3$.

**22.** Ta có (I) $\begin{cases}1+mx>0\\ x-2\leq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}mx>-1 & (1)\\ x\leq 2 & (2)\end{cases}$

Gọi tập nghiệm của (1) và (2) lần lượt là $S_1$ và $S_2$. Khi đó $S_2=(-\infty\,;2]$.

– Nếu $m=0$ thì $S_1=\varnothing$ nên hệ (I) vô nghiệm : $S=\varnothing$.

– Nếu $m > 0$ thì $S_1 = \left(-\frac{1}{m} ; +\infty\right)$ và $-\frac{1}{m} < 2$, nên tập nghiệm của hệ (I) là $S = \left(-\frac{1}{m} ; 2\right)$.

– Nếu $m < 0$ thì $S_1 = \left(-\infty ; -\frac{1}{m}\right)$, ta cần phải so sánh $-\frac{1}{m}$ với 2.

+ Nếu $m \leq -\frac{1}{2}$ thì $-\frac{1}{m} \leq 2$, nên $S = \left(-\infty ; -\frac{1}{m}\right)$.

+ Nếu $m > -\frac{1}{2}$ thì $-\frac{1}{m} > 2$, nên $S = (-\infty ; 2]$.

**23.** a) Tập nghiệm $S = \left(\frac{1}{2} ; 1\right) \cup (2 ; +\infty)$.

b) $\frac{x+1}{2x+1} \geq \frac{x-1}{3x+1} \Leftrightarrow \frac{(x+1)(3x+1)-(x-1)(2x+1)}{(2x+1)(3x+1)} \geq 0$

$\Leftrightarrow \frac{x^2+5x+2}{(2x+1)(3x+1)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(2x+1)(3x+1)} \geq 0$.

với $x_1 = \frac{-5-\sqrt{17}}{2}$ và $x_2 \frac{-5+\sqrt{17}}{2}$. Ta lập bảng sau :

| $x$ | $-\infty$ | $\frac{-5-\sqrt{17}}{2}$ | | $-\frac{1}{2}$ | | $\frac{-5+\sqrt{17}}{2}$ | | $-\frac{1}{3}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x - x_1$ | – | 0 | + | | + | | + | | + |
| $x - x_2$ | – | | – | | – | 0 | + | | + |
| $2x + 1$ | – | | – | 0 | + | | + | | + |
| $3x + 1$ | – | | – | | – | | – | 0 | + |
| Vế trái | + | 0 | – | | + | 0 | – | | + |

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là

$$S = \left(-\infty, \frac{-5-\sqrt{17}}{2}\right] \cup \left(-\frac{1}{2} ; \frac{-5+\sqrt{17}}{2}\right] \cup \left(-\frac{1}{3} ; +\infty\right).$$

**24.** a) Lập bảng phá dấu giá trị tuyệt đối như sau :

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $-1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\|x+1\|$ | | $-x-1$ | | $-x-1$ | $0$ | $x+1$ | |
| $3\|x+2\|$ | | $-3x-6$ | $0$ | $3x+6$ | | $3x+6$ | |
| Vế trái | | $-4x-7$ | | $2x+5$ | | $4x+7$ | |

- Với $x < -2$, bất phương trình đã cho trở thành $-4x - 7 > x + 7 \Leftrightarrow x < -2{,}8$. Do $-2, 8 < -2$ nên trong trường hợp này, bất phương trình có nghiệm $x < -2{,}8$.

- Với $-2 \leq x < -1$, ta có $2x + 5 > x + 7 \Leftrightarrow x > 2$. Kết hợp với điều kiện đang xét thì không có giá trị $x$ nào thoả mãn.

- Với $x \geq -1$ ta có $4x + 7 > x + 7 \Leftrightarrow x > 0$. Do $-1 \leq 0$ nên trong trường hợp này, nghiệm của bất phương trình là $x > 0$.

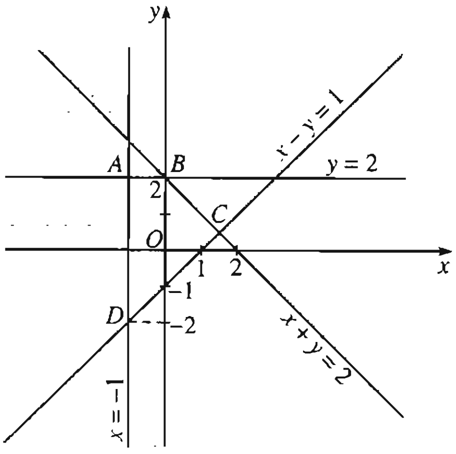
Vậy tập nghiệm $S = (-\infty\ ;\ -2{,}8) \cup (0\ ;\ +\infty)$.

b) $\left|\dfrac{-5}{x+2}\right| \leq \left|\dfrac{10}{x-1}\right| \Leftrightarrow \left(\dfrac{1}{x+2}\right)^2 \leq \left(\dfrac{2}{x-1}\right)^2 \Leftrightarrow \dfrac{3(x+1)(x+5)}{(x-1)^2(x+2)^2} \geq 0.$

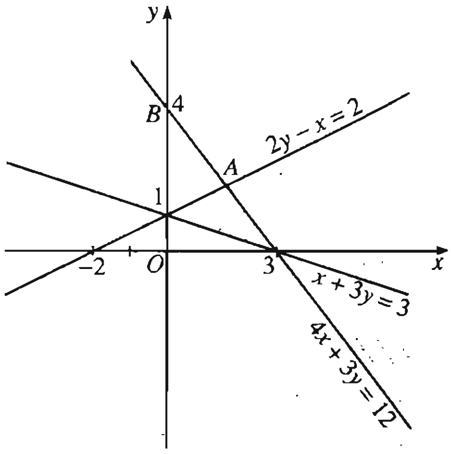
Lập bảng xét dấu ta tìm được tập nghiệm là

$$S = (-\infty\ ;\ -5] \cup [-1\ ;\ 1) \cup (1\ ;\ +\infty).$$

**25.**



*Hình 3*



*Hình 4*

a) Tập nghiệm của bất phương trình là miền tứ giác ABCD (kể cả biên) (h.3).

b) Hệ vô nghiệm (h.4).

**26.** a) Ta có $\Delta = (m-1)^2 - 12(m^2+1) = -11m^2 - 2m - 11 = -(11m^2 + 2m + 11)$ và $a = m^2 + 1 > 0$.

Tam thức luôn dương khi và chỉ khi $\Delta = -(11m^2 + 2m + 11) < 0$

$$\Leftrightarrow 11m^2 + 2m + 11 > 0 \Leftrightarrow m \in \mathbb{R}.$$

b) Nếu $m = \sqrt{2}$ dễ thấy biểu thức luôn dương với mọi $x$.

Nếu $m \neq \sqrt{2}$ thì biểu thức là tam thức có $a = \sqrt{2} - m \neq 0$ và biệt thức

$\Delta = (m - \sqrt{2})^2 - 4(\sqrt{2} - m)(2m + 3\sqrt{2}) = 9m^2 + 2\sqrt{2}m - 22.$

Tam thức luôn dương khi và chỉ khi $\begin{cases} a = \sqrt{2} - m > 0 \\ \Delta = 9m^2 + 2\sqrt{2}m - 22 < 0. \end{cases}$ (*)

Tam thức $f(m) = 9m^2 + 2\sqrt{2}m - 22$ có hai nghiệm $m_1 = \dfrac{-11\sqrt{2}}{9}$,

$m_2 = \sqrt{2}$.

Do đó $f(m) < 0$ khi và chỉ khi $\dfrac{-11\sqrt{2}}{9} < m < \sqrt{2}$

Kết hợp với (*) suy ra $\dfrac{-11\sqrt{2}}{9} < m < \sqrt{2}$.

**27.** a) Tam thức luôn luôn âm khi và chỉ khi $m > \dfrac{9\sqrt{2}}{4}$.

b) Với $m = -\dfrac{1}{5}$, khi đó biểu thức có giá trị là $\dfrac{11}{5} > 0$, do đó $m = -\dfrac{1}{5}$ không thoả mãn.

Với $m \neq -\dfrac{1}{5}$, khi đó biểu thức đã cho là một tam thức bậc hai.

Tam thức luôn âm khi và chỉ khi

$$\begin{cases} a = 5m + 1 < 0 \\ \Delta = (5m+1)^2 - 4(5m+1)(4m+3) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad m < -1.$$

**28.** a) Bất phương trình tương đương với $\dfrac{x}{x(x+4)} \geq 0$, suy ra tập nghiệm là $(-4 ; 0) \cup (0 ; +\infty)$.

b) Bất phương trình được biến đổi tương đương với

$$\frac{x^4 + 16}{2x^2(x-2)(x+2)^2} > 0.$$

Suy ra tập nghiệm là $S = (2 ; +\infty)$.

**29.** a) $6 < x < 9$.

b) $1 \leq x \leq 3$ và $x = -1$.

**30.** à) Bất phương trình đã cho có hệ số $a = 3 > 0$, để bất phương trình vô nghiệm, điều kiện cần và đủ là : $\Delta = m^2 - 12(m+2) \leq 0$

$$\Leftrightarrow m^2 - 12m - 24 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 6 - 2\sqrt{15} \leq m \leq 6 + 2\sqrt{15}.$$

b) Với $m = 3$, khi đó bất phương trình trở thành $-2x - 1 > 0$ và bất phương trình có nghiệm là $x < -\dfrac{1}{2}\cdot$ Suy ra $m = 3$ không thoả mãn.

Với $m \neq 3$. Để bất phương trình vô nghiệm điều kiện cần và đủ là :

$$\begin{cases} 3 - m < 0 \\ \Delta' = (2m-5)^2 - (3-m)(5-2m) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 3 \\ 2m^2 - 9m + 10 < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > 3 \\ 2 < m < \dfrac{5}{2}\cdot \end{cases}$$

Suy ra không tồn tại $m$ để bất phương trình đã cho vô nghiệm.

**31.** Đặt $y = x^2$, $y \geq 0$. Khi đó vế trái của phương trình đã cho trở thành $f(y) = y^2 - 2my + m^2 - 1$.

Điều kiện của bài toán được thoả mãn nếu phương trình $f(y) = 0$ vô nghiệm hoặc chỉ có hai nghiệm âm.

*Cách 1.* Do $\Delta' = 1$ nên phương trình $f(y) = 0$ có hai nghiệm $y_1 = m - 1$ và $y_2 = m + 1$. Ta phải có

$$\begin{cases} m - 1 < 0 \\ m + 1 < 0, \end{cases}$$

tức là $m < -1$.

Vậy phương trình trùng phương đã cho vô nghiệm khi $m < -1$.

*Cách 2.* Do $\Delta' = 1$ nên phương trình $f(y) = 0$ có hai nghiệm phân biệt. Hai nghiệm đó âm khi và chỉ khi

$$\begin{cases} -\dfrac{b}{a} = 2m < 0 \\ \dfrac{c}{a} = m^2 - 1 > 0, \end{cases}$$

tức là $m < -1$.

Ta có kết luận như trên.

**32.** $-3 < m < 1$. *Hướng dẫn.* Đặt $y = x + 1$ bài toán trở thành :

Tìm $m$ sao cho phương trình

$$(m-1)(y-1)^2 - (m-5)(y-1) + m - 1 = 0$$

có hai nghiệm dương phân biệt, tức là phương trình

$$(m-1)y^2 - (3m-7)y + 3m - 7 = 0$$

có hai nghiệm dương phân biệt.

**33.** a) $x = \pm 3$.

b) $x \in \left\{\pm 3 ; \pm \dfrac{1}{2}\right\}$

**34.** a) $S = \left[1 ; \dfrac{4-\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\dfrac{4+\sqrt{2}}{2} ; 3\right]$.

*Gợi ý.* Bất phương trình tương đương với hệ :

$$\begin{cases}-x^2+4x-3<(x-2)^2\\ x-2>0\\ -x^2+4x-3\geq 0.\end{cases}$$

b) $S=\left[-\frac{5}{2};2\right)$.

*Gợi ý.* Bất phương trình tương đương với :

$$\text{(I)}\begin{cases}2x+5\geq 0\\ x+1<0\end{cases}\quad\text{hoặc (II)}\begin{cases}2x+5>(x+1)^2\\ x+1\geq 0.\end{cases}$$

**35.** a) $S=\left[-\sqrt{\frac{17}{2}};-2\right]\cup\left[2;\sqrt{\frac{17}{2}}\right]$

*Gợi ý.* Đặt $t=\sqrt{2x^2-8}\geq 0$.

b) $S=(-\infty;-1)\cup(4;+\infty)$.

*Gợi ý.* Đặt $t=\sqrt{x^2-3x+5}\geq 0$.

**36.** a) Dấu hiệu là tuổi các bà mẹ ở nước Mĩ sinh con lần đầu. Đơn vị điều tra là các bà mẹ ở nước Mĩ sinh con lần đầu.

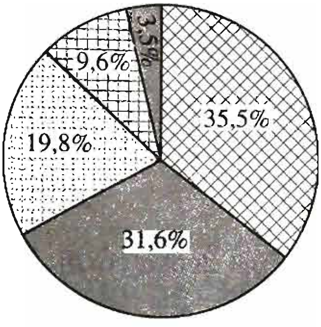
b) Tuổi trung bình là 22,89.

c) Bảng phân bố tần suất

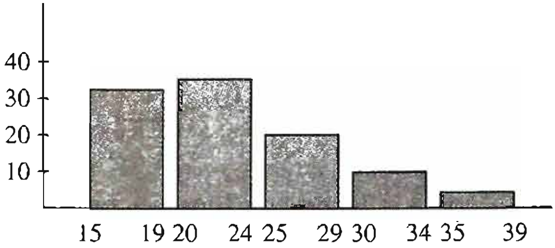
| Khoảng | Tần suất(%) |
|---|---|
| [15 ; 19] | 31,6 |
| [20 ; 24] | 35,5 |
| [25 ; 29] | 19,8 |
| [30 ; 34] | 9,6 |
| [35 ; 39] | 3,5 |

d) Biểu đồ hình quạt (h.5)

e) Biểu đồ tần suất hình cột (h. 6)



Hình 5



Hình 6

**37.** Gọi số bé nhất là $a$. Số lớn nhất là $a + 18 > 8$. Vậy có thể xảy ra hai trường hợp sau

*Trường hợp 1.* Mẫu là $a$ ; $b$ ; 8 ; 8 ; $a + 18$ (sắp xếp theo thứ tự tăng dần).

Khi đó tổng các số liệu là $2a + b + 34 = 12 \times 5 = 60$, suy ra $2a + b = 26$. Vì $a \leq 8$ ; $b \leq 8$ nên $2a + b \leq 24$. Vậy trường hợp này không xảy ra.

*Trường hợp 2.* Mẫu là $a$ ; 8 ; 8 ; $b$ ; $a + 18$ (sắp xếp theo thứ tự tăng dần).

Khi đó tổng các số liệu là $2a + b + 34 = 12 \times 5 = 60$. Suy ra $2a + b = 26$ hay $b = 26 - 2a = 2(13 - a)$.

Vậy $b$ chẵn, tức là $b$ có dạng $b = 2c$. Suy ra $c = 13 - a$. Vì $b \leq a + 18$ và $a = 13 - c$ nên $2c \leq 13 - c + 18 = 31 - c$. Vậy $3c \leq 31$ hay $c \leq 10$. Vì $a \leq 8$ nên $c \geq 13 - 8 = 5$. Khi đó $b \geq 10 > 8$.

Tóm lại $5 \leq c \leq 10$. Như vậy ta có 6 mẫu thoả mãn điều kiện đã nêu là

$\{13 - c ; 8 ; 8 ; 2c ; 31 - c\}$ trong đó $c \in \{5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10\}$. Cụ thể là các mẫu

{8 ; 8 ; 8 ; 10 ; 26},

{7 ; 8 ; 8 ; 12 ; 25},

{6 ; 8 ; 8 ; 14 ; 24},

{5 ; 8 ; 8 ; 16 ; 23},

{4 ; 8 ; 8 ; 18 ; 22},

{3 ; 8 ; 8 ; 20 ; 21}.

**38.** $3\sin(\alpha - \beta) = \sin(\beta - \alpha + \alpha) = \sin\alpha\cos(\alpha - \beta) - \sin(\alpha - \beta)\cos\alpha$, từ đó ta có

$(3 + \cos\alpha)\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos(\alpha - \beta)$ (*), vậy $\tan(\alpha - \beta) = \dfrac{\sin\alpha}{3 + \cos\alpha}$.

(*Chú ý*. $\cos(\alpha - \beta) \neq 0$ vì nếu $\cos(\alpha - \beta) = 0$ thì từ (*) ta suy ra $\sin(\alpha - \beta) = 0$, vô lí).

**39.** Ta có :

$$\cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = \cos\gamma[\cos(\pi - (\alpha + \beta)) + 2\cos\alpha\cos\beta]$$

$$= \cos\gamma[-\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta + 2\cos\alpha\cos\beta] = \cos\gamma\cos(\alpha - \beta)$$

$$= -\cos(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta) = \sin^2\alpha\sin^2\beta - \cos^2\alpha\cos^2\beta$$

$$= \sin^2\alpha\sin^2\beta - (1 - \sin^2\alpha)(1 - \sin^2\beta) = -1 + \sin^2\alpha + \sin^2\beta = 1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta.$$

**40.** Đặt $t = \tan\frac{\alpha}{2}$, thì $4.\dfrac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha} - \dfrac{2}{\cos^2\frac{\alpha}{2}} + 3 = 4t^2 - 2(1 + t^2) + 3 = 2t^2 + 1$,

nên giá trị nhỏ nhất đạt được là 1 khi $t = 0$.

**41.** a) $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ; $\alpha \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$ : $\alpha \neq \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{4}$ với $k \in \mathbb{Z}$.

*Hướng dẫn*. Có thể viết mẫu thành

$$(\cos\alpha + \cos 7\alpha) + (\cos 3\alpha + \cos 5\alpha) = 2\cos 4\alpha(\cos 3\alpha + \cos\alpha)$$

$$= 4\cos\alpha\cos 2\alpha\cos 4\alpha.$$

b) *Hướng dẫn*. Viết tử thức thành $2\sin 4\alpha(\cos 3\alpha + \cos\alpha)$.

**42.** Dùng công thức hạ bậc và công thức biến đổi tổng thành tích.

# MỤC LỤC

Trang

*Chương I.* **MỆNH ĐỀ - TẬP HỢP** 5

A. NHỮNG KIẾN THỨC CẦN NHỚ 5

B. ĐỀ BÀI 6

§1. Mệnh đề và mệnh đề chứa biến 6

§2. Áp dụng mệnh đề vào suy luận toán học 9

§3. Tập hợp và các phép toán trên tập hợp 11

§4. Số gần đúng và sai số 12

**Bài tập ôn tập chương I** 12

Giới thiệu một số câu hỏi trắc nghiệm khách quan 14

C. ĐÁP SỐ - HƯỚNG DẪN LỜI GIẢI 16

*Chương II.* **HÀM SỐ** 26

A. NHỮNG KIẾN THỨC CẦN NHỚ 26

B. ĐỀ BÀI 29

§1. Đại cương về hàm số 29

§2. Hàm số bậc nhất 32

§3. Hàm số bậc hai 34

**Bài tập ôn tập chương II** 36

Giới thiệu một số câu hỏi trắc nghiệm khách quan 37

C. ĐÁP SỐ - HƯỚNG DẪN - LỜI GIẢI 39

*Chương III.* **PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT VÀ BẬC HAI** 55

A. NHỮNG KIẾN THỨC CẦN NHỚ 55

B. ĐỀ BÀI 58

§1. Đại cương về phương trình 58

§2. Phương trình bậc nhất và bậc hai một ẩn 59

§3. Một số phương trình quy về phương trình bậc nhất hoặc bậc hai 62

§4. Phương trình và hệ phương trình bậc nhất nhiều ẩn 63

§5. Một số ví dụ về hệ phương trình bậc hai hai ẩn 66

**Bài tập ôn tập chương III** 67

Giới thiệu một số câu hỏi trắc nghiệm khách quan 70

C. ĐÁP SỐ - HƯỚNG DẪN LỜI GIẢI 71

*Chương IV.* **BẤT ĐẲNG THỨC VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH** 99

A. NHỮNG KIẾN THỨC CẦN NHỚ 99

B. ĐỀ BÀI 102

§1. Bất đẳng thức và chứng minh bất đẳng thức 102

§2. Đại cương về bất phương trình 106

§3. Bất phương trình và hệ bất phương trình bậc nhất một ẩn 107

§4. Dấu của nhị thức bậc nhất 109

§5. Bất phương trình và hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn 110

§6. Dấu của tam thức bậc hai 111

§7. Bất phương trình bậc hai 112

§8. Một số phương trình và bất phương trình quy về bậc hai 114

**Bài tập ôn tập chương IV** 116

Giới thiệu một số câu hỏi trắc nghiệm khách quan 120

C. ĐÁP SỐ - HƯỚNG DẪN LỜI GIẢI 122

*Chương V.* **THỐNG KÊ** 172

A. NHỮNG KIẾN THỨC CẦN NHỚ 172

B. ĐỀ BÀI 173

§1. Một vài khái niệm mở đầu 173

§2. Trình bày một mẫu số liệu 173

§3. Các số đặc trưng của mẫu số liệu 175

**Bài tập ôn tập chương V** 180

Giới thiệu một số câu hỏi trắc nghiệm khách quan 181

C. ĐÁP SỐ   HƯỚNG DẪN - LỜI GIẢI 183

*Chương VI.* **GÓC LƯỢNG GIÁC VÀ CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC** 193

A. NHỮNG KIẾN THỨC CẦN NHỚ 193

B. ĐỀ BÀI 195

§1. Góc và cung lượng giác 195

§2. Giá trị lượng giác của góc (cung) lượng giác 195

§3. Giá trị lượng giác của các góc (cung) có liên quan đặc biệt 200

§4. Một số công thức lượng giác 204

**Bài tập ôn tập chương VI** 206

Giới thiệu một số câu hỏi trắc nghiệm khách quan 208

C. ĐÁP SỐ - HƯỚNG DẪN - LỜI GIẢI 210

**Bài tập ôn tập cuối năm** 238

A. ĐỀ BÀI 238

B. ĐÁP SỐ - HƯỚNG DẪN   LỜI GIẢI 243

*Chịu trách nhiệm xuất bản :* Chủ tịch HĐQT kiêm Tổng Giám đốc **NGÔ TRẦN ÁI**
Phó Tổng Giám đốc kiêm Tổng biên tập **NGUYỄN QUÝ THAO**

*Biên tập lần đầu :* **HOÀNG XUÂN VINH – ĐẶNG MINH THU**
*Biên tập tái bản :* **HOÀNG VIỆT**
*Biên tập kĩ thuật :* **KIỀU NGUYỆT VIÊN – TRẦN THANH HẰNG**
*Trình bày bìa .* **BÙI QUANG TUẤN**
*Sửa bản in .* **HOÀNG VIỆT**
*Chế bản .* **CÔNG TY CỔ PHẦN THIẾT KẾ VÀ PHÁT HÀNH SÁCH GIÁO DỤC**

---

# BÀI TẬP ĐẠI SỐ 10 - NÂNG CAO

Mã số : NB003T1

In 10.000 bản, (QĐ:04BT/KH11) khổ 17x24cm.
Tại Nhà in Báo Hà Nam.
Số 29 - Đ. Lê Hoàn - TP. Phủ Lý - Hà Nam
Số in: 410. Số XB: 01-2011/CXB/850-1235/GD
In xong và nộp lưu chiểu tháng 01 năm 2011.

HUÂN CHƯƠNG HỒ CHÍ MINH

LONDON
QUALITY
CROWN
QC 100

VƯƠNG MIỆN KIM CƯƠNG
CHẤT LƯỢNG QUỐC TẾ

# SÁCH BÀI TẬP LỚP 10

1. BÀI TẬP ĐẠI SỐ 10
2. BÀI TẬP HÌNH HỌC 10
3. BÀI TẬP VẬT LÍ 10
4. BÀI TẬP HOÁ HỌC 10
5. BÀI TẬP NGỮ VĂN 10 (tập một, tập hai)
6. BÀI TẬP TIN HỌC 10
7. BÀI TẬP TIẾNG ANH 10
8. BÀI TẬP TIẾNG PHÁP 10
9. BÀI TẬP TIẾNG NGA 10

## SÁCH BÀI TẬP LỚP 10 - NÂNG CAO

- BÀI TẬP ĐẠI SỐ 10
- BÀI TẬP HÌNH HỌC 10
- BÀI TẬP VẬT LÍ 10
- BÀI TẬP HOÁ HỌC 10
- BÀI TẬP NGỮ VĂN 10 (tập một, tập hai)
- BÀI TẬP TIẾNG ANH 10

Bạn đọc có thể mua sách tại :

- Các Công ty Sách - Thiết bị trường học ở các địa phương.
- Công ty CP Đầu tư và Phát triển Giáo dục Hà Nội, 187B Giảng Võ, TP. Hà Nội.
- Công ty CP Đầu tư và Phát triển Giáo dục Phương Nam, 231 Nguyễn Văn Cừ, Quận 5, TP. HCM.
- Công ty CP Đầu tư và Phát triển Giáo dục Đà Nẵng, 15 Nguyễn Chí Thanh, TP. Đà Nẵng.

hoặc các cửa hàng sách của Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam :

– Tại TP. Hà Nội : 187 Giảng Võ ; 232 Tây Sơn ; 23 Tràng Tiền ;
25 Hàn Thuyên ; 32E Kim Mã ;
14/3 Nguyễn Khánh Toàn ; 67B Cửa Bắc.
– Tại TP. Đà Nẵng : 78 Pasteur ; 247 Hải Phòng.
– Tại TP. Hồ Chí Minh : 104 Mai Thị Lựu ; 2A Đinh Tiên Hoàng, Quận 1 ;
240 Trần Bình Trọng ; 231 Nguyễn Văn Cừ, Quận 5.
– Tại TP. Cần Thơ : 5/5 Đường 30/4.
– Tại Website bán sách trực tuyến : www.sach24.vn

**Website: www.nxbgd.vn**

8 934994 023948

**Giá : 14.600đ**